IDENTIFIKASI DISTRIBUSI CURAH HUJAN DAN PENDUGAAN PARAMETERNYA MENGGUNAKAN METODE BAYES

SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA

OLEH:

PUTRI TRISNA SARI

1410431019

JURUSANMATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

PADANG

2019

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa:

Nama	: Putri Trisna Sari
No. Buku Pokok	: 1410431019
Jurusan	: Matematika
Bidang	: Statistika dan Teori Peluang
Judul Skripsi	: **Identifikasi Distribusi Curah Hujan Di Sumatera Barat dan Pendugaan Parameternya Menggunakan Metode Bayes**

Telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal **16Juli2019** berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing

1.

Dr. Ferra Yanuar
NIP. 197505301999032002

2.

Yudiantri Asdi, M.Sc
NIP. 196405271989011001

Penguji

1.

Narwen, M.Si
NIP. 196704101997021001

2.

Dr. Maryastri
NIP. 196505311991032001

3.

Dr. Mahdhivan Syafwan
NIP. 198208032006041001

Mengetahui,
KetuaJurusan Matematika UniversitasAndalas

Dr. Mahdhivan Syafwan
NIP. 198208032006041001

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

Alhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur penulis ucapkan atas kehadirat Allah SWT yang telah memberikan petunjuk, rahmat, hidayah dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul **"Identifikasi Distribusi Curah Hujan di Sumatera Barat dan Pendugaan Parameternya Menggunakan Metode Bayes"** sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas. Shalawat beserta Salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah mengantarkan umat manusia dari zaman jahiliyah ke zaman berilmu pengetahuan.

Dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini, penulis menyadari sepenuhnya bahwa Tugas Akhir ini tidak terlepas dari dorongan, dukungan serta kerjasama maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis dalam kesempatan ini dengan segala kerendahan hati mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah membantu dalam penulisan Tugas Akhir ini terutama kepada:

1. Ibu **Dr. Ferra Yanuar** dan Bapak **Yudiantri Asdi M.Sc** selaku dosen pembimbing Tugas Akhir yang telah bersedia membimbing dengan sabar dan ikhlas, serta mengarahkan, meluangkan waktu dan pikiran untuk memberikan

ilmu, motivasi dan nasehat yang sangat berguna dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

2. Bapak **Narwen, M.Si**, Ibu **Dr. Maiyastri** dan Bapak **Dr. Mahdhivan Syafwan** selaku dosen penguji yang telah membaca, menilai serta memberikan saran dan kritikan untuk perbaikan dalam penulisan Tugas Akhir ini.
3. Bapak **Dr. Admi Nazra** selaku dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan ilmu, pengarahan dan nasehat yang sangat bermanfaat serta motivasi kepada penulis selama masa studi di Jurusan Matematika FMIPA Unand.
4. Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unand beserta seluruh dosen yang telah memberikan ilmu dengan penuh kesabaran, staf administasi dan karyawan Jurusan Matematika Fmipa Unand.
5. Teman-teman Logaritma'14, uda uni dan adik-adik di Jurusan Matematika yang telah memberikan semangat, bantuan, pengalaman serta kenangan yang indah kepada penulis selama melaksanakan studi hingga Tugas Akhir di Jurusan Matematika FMIPA Unand.
6. Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) FMIPA Unand, Laboratorium Statistika dan Komputasi Jurusan Matematika FMIPA Unand untuk semua pembelajaran yang begitu berharga.
7. UKMF KMT Zenerics yang telah memberikan semangat, pengalaman, pembelajaran serta kenangan yang indah kepada penulis selama studi di Jurusan Matematika FMIPA Unand.

8. Sahabat-sahabat dan Keluarga Besar BP 19 yang mendukung dan selalu menyemangati baik dalam susah maupun senang sampai akhir masa studi.
9. Semua pihak yang yang telah ikut membantu penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Teristimewa penulis mengucapkan terima kasih kepada Mama (**Khainar**) dan Ayah (**Alm. Nasrul**) yang telah memberikan peran khusus dalam mendidik diluar bidang akademis sebagai bekal di dunia dan di akhirat kelak, seluruh dukungan dalam segi materi, do'a, motivasi dan membesarkan penulis sehingga dapat menempuh pendidikan akademik yang layak. Teruntuk abang (**M. Rizky Nurul Huda Yusi** dan **M. Anggun Trisno Wahyudi**) kakak (**Sri Wahyu Hidayati**) dan Adik (**M. Fajri Ramadhan**) yang selalu memberikan dukungan dan menjadi penyemangat bagi penulis serta seluruh keluarga besar .

Semoga bantuan dan bimbingan yang telah diberikan pada penulis dapat menjadi amal ibadah di sisi-Nya. Penulis juga menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih banyak kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu, penulis dengan segala kerendahan hati mengharapkan adanya kritik dan saran untuk Tugas Akhir ini dari berbagai pihak untuk perbaikan di masa yang akan datang. Semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Padang, 16 Juli 2019

Putri Trisna Sari, S.Si
(putritrisnasari@gmail.com)

ABSTRAK

Salah satu fenomena hidrologi yang sering terjadi yaitu curah hujan. Curah hujan merupakan jumlah air hujan yang turun pada suatu daerah dalam waktu tertentu. Besarnya curah hujan berbeda-beda menurut waktu dan tempat dengan satuan dari curah hujan adalah mm^3/jam. Berdasarkan data curah hujan dapat ditentukan beberapa distribusi tertentu, salah satu distribusi tersebut yakni distribusi Lognormal. Pada distribusi Lognormal akan dilakukan pendugaan parameter lokasi (μ) dan parameter skala (σ^2). Pendugaan parameter dilakukan dengan pendugaan langsung dan pendugaan tidak langsung. Pendugaan parameter dengan cara pendugaan langsung berdasarkan pada data sampel yang diperoleh. Sedangkan pendugaan tidak langsung digunakan dengan metode Bayes. Perbandingan antara kedua pendugaan menghasilkan bahwa pendugaan tidak langsung (metode Bayes) menghasilkan dugaan varian yang lebih kecil daripada pendugaan langsung. Dengan demikian disimpulkan bahwa pendugaan dengan metode Bayes merupakan metode pendugaan yang lebih baik.

Kata Kunci : *Curah Hujan, Distribusi Lognormal, Metode Bayes.*

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Suatu fenomena hidrologi merupakan fenomena yang sangat rumit dan tidak akan pernah sepenuhnya dimengerti. Pada hidrologi terjadi suatu daur hidrologi yang sederhana sebagai suatu sistem yang komponen-komponennya berupa penguapan, curah hujan, aliran dan tahapan-tahapan lain dari daur hidrologi. Curah hujan adalah jumlah air hujan yang turun pada suatu daerah dalam waktu tertentu. Besar kecilnya curah hujan dipengaruhi oleh beberapa faktor yaitu arus udara, besarnya perairan, intensitas panas matahari, topografi, serta banyak sedikitnya asap pabrik dan kendaraan bermotor, sehingga besarnya curah hujan berbeda-beda menurut waktu dan tempat. Satuan dari curah hujan adalah tinggi air persatuan waktu seperti mm^3/det, mm^3/jam[12].

Pemahaman tentang rata-rata distribusi curah hujan adalah suatu hal yang sangat penting terutama untuk manajemen sumber daya air pada suatu daerah. Pengetahuan tentang karakteristik dari curah hujan sangat penting dalam hal perancangan dan pengoperasian sistem pertanian, telekomunikasi maupun sistem kendali kualitas air, serta daerah aliran sungai.

Pada penelitian ini akan ditentukan distribusi dari data rata-rata curah hujan di kota/kabupaten terpilih yang ada di Sumatera Barat. Pendugaan parameter pada pola distribusi curah hujan tersebut akan diestimasi dengan menggunakan metode Bayes. Metode Bayes ini digunakan karena memiliki kemampuan lebih dari metode penduga klasik lainnya, seperti metode Kuadrat

Terkecil atau *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Metode Bayes tidak memerlukan sebarang asumsi terhadap error sebagaimana yang diperlukan jika menggunakan metode Kuadrat Terkecil atau MLE. Pada metode Bayes parameter model yang akan diestimasi diasumsikan sebagai peubah acak yang memiliki sebaran tertentu yang dinyatakan sebagai distribusi prior sedangkan informasi mengenai fungsi kepekatan peluangnya dinyatakan dalam bentuk fungsi *likelihood*. Parameter model dengan Bayes diduga dengan menentukan distribusi posterior yang diperoleh secara proposional dari distribusi likelihood dan distribusi prior.

Penggunaan metode Bayes untuk menduga parameter model dari suatu distribusi sudah dilakukan oleh banyak peneliti sebelumnya. Diantara yaitu penelitian oleh Lilla tahun 2018 yang menggunakan metode Bayes untuk menduga parameter dari distribusi Poisson [8], Hasanah tahun 2018 yang menggunakan metode Bayes untuk menduga parameter dari distribusi Gamma [5], dan Rahmadiah tahun 2018 yang menggunakan metode Bayes untuk menduga parameter dari distribusi Eksponensial [10].

Pada penelitian ini akan digunakan metode Bayes untuk menduga parameter model dari distribusi data rata-rata curah hujan pada beberapa kota/kabupaten terpilih di Sumatera Barat.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang diuraikan sebelumnya, masalah yang dibahas pada penelitian ini adalah pengidentifikasian distribusi dari data rata-rata curah hujan dan dilanjutkan dengan pendugaan parameter dari distribusi tersebut dengan menggunakan metode Bayes.

1.3 Batasan Masalah

Pada penulisan tugas akhir ini, data yang digunakan adalah data rata-rata curah hujan di kota/kabupaten terpilih yang ada di Sumatera Barat pada tahun 2010 sampai dengan tahun 2017. Kemungkinan distribusi yang bisa digunakan pada curah hujan adalah distribusi Normal, distribusi Lognormal, distribusi Gumbel max, distribusi Gumbel min dan distribusi log Pearson type 3[12]. Untuk menentukan distribusi yang dipakai digunakan uji Kolmogorov-Smirnov. Pendugaan parameter dilakukan dengan menggunakan metode Bayes dan prior yang dipilih adalah prior non-informatif.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Menentukan jenis distribusi dari data rata-rata curah hujan di kota/kabupaten terpilih yang ada di Sumatera Barat.
2. Menentukan pendugaan parameter dari distribusi data rata-rata curah hujan di kota/kabupaten terpilih yang ada di Sumatera Barat.

1.5 Sistematika Penulisan

Sitematika penulisan tugas akhir ini terdiri dari lima bab. Pada bab I berisikan latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian dan sistematika penulisan. Pada bab II berisikan landasan teori yang mencakup materi dasar dan teori-teori penunjang dalam penelitian. Pada bab III metode penelitian yang merupakan langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian. Pada bab IV hasil dan pembahasan yang yang diperoleh berdasarkan langkah-langkah bab III sebelumnya. Pada bab V berisikan kesimpulan dan saran yang penulis berikan.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai teori dan konsep dasar terkait pendugaan parameter dengan metode Bayes.

2.1 Peubah Acak dan Fungsi Kepekatan Peluang

Pada statistika ada istilah percobaan yang merupakan aktifitas untuk membangkitkan data sehingga dapat diketahui hasil yang muncul. Berikut akan dijelaskan mengenai beberapa definisi yang terkait percobaan.

Definisi 2.1.1 [15] Ruang Contoh. *Himpunan semua kemungkinan hasil suatu percobaan disebut ruang contoh dan dilambangkan dengan huruf S.*

Setiap kemungkinan hasil dalam suatu ruang contoh disebut anggota ruang contoh atau titik contoh. Dalam suatu percobaan, akan terjadi suatu kejadian. Pada setiap kejadian terbentuk sebuah kumpulan titik contoh yang merupakan himpunan bagian ruang contoh. Himpunan bagian ini mencakup semua anggota ruang contoh yang menyusun kejadian itu.

Definisi 2.1.2 [15] Kejadian. *Kejadian adalah suatu himpunan bagian dari contoh.*

Dalam suatu percobaan seringkali ingin dihasilkan titik contoh dengan nilai numerik. Oleh sebab itu akan lebih tepat jika hasil kemungkinan percobaan dinyatakan dalam konsep, yaitu peubah acak.

Definisi 2.1.3 [1] Peubah acak. *dimisalkan dengan X adalah sebuah fungsi yang didefinisikan pada ruang sampel S, yang menghubungkan setiap titik contoh e dalam S dengan suatu bilangan rill, X(e)=x.*

Huruf kapital seperti X, Y, dan Z digunakan sebagai notasi peubah acak. Dan huruf kecil (x, y, z, ...) digunakan untuk notasi nilai kemungkinan bahwa peubah acak yang berhubungan dapat diperoleh.

Peubah acak dibagi atas peubah acak diskret dan peubah acak kontinu serta setiap peubah acak memiliki fungsi kepekatan peluang.

2.1.1 Fungsi Kepekatan Peluang Peubah Acak Diskret

Peubah acak diskret adalah peubah acak yang dibangkitkan dari ruang contoh diskret dan himpunan kemungkinan hasilnya dapat dihitung. Sebagai contoh, banyak barang yang cacat dalam sampel sebanyak k buah, banyak korban meninggal dalam kecelakaan setiap tahunnya dan sebagainya.

Definisi 2.1.4 [1] *Jika himpunan semua nilai yang mungkin dari suatu peubah acak X adalah himpunan bilangan tercacah* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *atau* $x_1, x_2, \dots$ *maka X dinamakan peubah acak diskret. Fungsi:*

$$f(x) = P(X = x) \qquad x = x_1, x_2, \dots$$

yang memasang setiap nilai x dengan nilai peluang dinamakan sebagai fungsi kepekatan peluang diskret.

Definisi 2.1.5 [15] *Himpunan pasangan terurut* $(x, f(x))$ *merupakan suatu fungsi kepekatan peluang peubah acak diskret X, bila untuk setiap kemungkinan hasil x,*

1. $f(x) \geq 0$,
2. $\sum_x f(x) = 1$,
3. $P(X = x) = f(x)$

2.1.2 Fungsi Kepekatan Peluang Peubah Acak Kontinu

Peubah acak kontinu adalah peubah acak yang dibangkitkan dari ruang contoh kontinu. Peubah acak kontinu diperoleh dari semua nilai yang berada pada skala kontinu seperti semua kemungkinan tinggi, berat, jarak, jangka hidup dan sebagainya.

Definisi 2.1.6 [1] *Suatu peubah acak X disebut sebagai peubah acak kontinu jika terdapat sebuah fungsi f(x), disebut sebagai fungsi kepekatan peluang dari X, sedemikian sehingga fungsi distribusi kumulatif dapat direpresentasikan sebagai*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Definisi 2.1.7 [15] *Fungsi $f(x)$ adalah fungsi kepekatan peluang peubah acak kontinu di X, yang didefinisikan di atas himpunan semua bilangan real R, bila*

1. $f(x) \geq 0, untuk\ semua\ x \in R,$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,$
3. $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$

2.1.3 Fungsi Kepekatan Peluang Bersama

Misalkan suatu peubah acak yang berdimensi k yaitu $X_1, X_2, \dots, X_k$, maka fungsi kepekatan peluang bersama dari peubah acak tersebut dapat ditulis dengan $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$.

Definisi 2.1.8 [1] *Fungsi kepekatan peluang bersama dari k dimensi peubah acak diskret* $\boldsymbol{X}$=$X_1, X_2, \dots, X_k$ *didefinisikan*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k)$$

untuk semua nilai $\boldsymbol{x} = x_1, x_2, \dots, x_k$ *dari* $\boldsymbol{X}$.

Jika $f(x,y)$ adalah fungsi kepekatan peluang bersama dari peubah acak diskret X dan Y maka fungsi kepekatan peluang dari X, $g(x)$, dapat diperoleh dengan menjumlahkan $f(x,y)$ terhadap semua nilai Y. Sebaliknya fungsi kepekatan peluang dari Y, $h(y)$, dapat diperoleh dengan menjumlahkan $f(x,y)$ untuk semua nilai X. Berdasarkan hal tersebut $g(x)$ dan $h(y)$ masing-masing dinamakan sebagai fungsi kepekatan peluang marginal dari X dan Y. Jika X dan Y peubah acak kontinu maka tanda penjumlahan diganti dengan integral.

Definisi 2.1.9 [1] *Jika pasangan peubah acak (X,Y) adalah peubah acak yang memiliki fungsi kepekatan peluang bersama f(x,y) maka fungsi kepekatan peluang marginal untuk X dan Y didefinisikan sebagai*

$$g(x) = \sum_{y} f(x,y) \quad dan \quad h(y) = \sum_{x} f(x,y),$$

untuk data diskret, dan

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \quad dan \quad h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

untuk data kontinu.

Jika X dan Y adalah peubah acak dengan fungsi kepekatan peluang bersama $f(x,y)$, maka fungsi kepekatan peluang bersyarat dari X dan Y didefinisikan sebagai berikut

Definisi 2.1.10 [1] *Jika X dan Y merupakan peubah acak diskret atau kontinu dengan fungsi kepekatan peluang bersama $f(x,y)$, maka fungsi kepekatan peluang bersyarat (fkp bersyarat) dari Y, jika diberikan $X = x$, dapat didefinisikan dengan*

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)}$$

Untuk setiap x sedemikian sehingga $f(x) > 0$ dan nol untuk selainnya.

2.2 Nilai Harapan dan Ragam

Nilai harapan dari peubah acak X dilambangkan dengan $E(X)$. Ragam dari suatu peubah acak X dilambangkan dengan $Var(X)$.

Definisi 2.2.1 [15] Misalkan *X suatu peubah acak dengan fungsi kepekatan peluang $f(x)$, maka nilai harapan dari X adalah:*

$$\mu = E(X) = \sum_x xf(x) \tag{2.2.1}$$

bila X peubah acak diskret

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx \tag{2.2.2}$$

bila X peubah acak kontinu.

Teorema 2.2.1 [15] *Misalkan X adalah suatu peubah acak, a,dan b merupakan suatu konstanta, maka*

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Bukti. Misalkan X peubah acak kontinu maka menurut Definisi 2.2.1 pada Persamaan 2.2.2 berlaku:

$$E(aX + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)f(x)\,dx$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

berdasarkan Definisi 2.2.1 dan Definisi 2.1.7 diketahui bahwa

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx \ \ dan \ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

sehingga diperoleh

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

untuk peubah acak diskret dapat dilakukan dengan cara yang sama.

Definisi 2.2.2 [1] *Ragam dari sebuah peubah acak X yaitu:*

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2]$$

Teorema 2.2.2 [1] *Ragam peubah acak X adalah*

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2$$

Bukti. Berdasarkan Definisi 2.2.2 diperoleh

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[(X - \mu)^2] \\ &= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $Var(X) = E(X^2) - \mu^2$.

Teorema 2.2.3 [1] *Jika X suatu peubah acak, a dan b suatu konstanta, maka*

$$Var(aX + b) = a^2Var(X)$$

Bukti. Berdasarkan Definisi 2.2.2 diperoleh:

$$\begin{aligned} Var(aX + b) &= E\left[\left(aX + b - E(aX + b)\right)^2\right] \\ &= E[(aX + b - a\mu - b)^2] \\ &= E[(aX - a\mu)^2] \\ &= a^2E[(X - \mu)^2] \\ &= a^2Var(X) \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $Var(aX + b) = a^2Var(X)$.

2.3 Metode Transformasi

Misalkan X peubah acak kontinu dan $Y = u(X)$ adalah suatu transformasi satu-satu, maka fungsi kepekatan peluang peubah acak Y dapat ditentukan dengan teorema berikut:

Teorema 2.3.1 [1] *Misalkan X suatu peubah acak kontinu dengan fungsi kepekatan peluang* $f_X(x)$ *dan asumsikan* $Y = u(X)$ *suatu transformasi satu-satu dari* $A = \{x | f_X(x) > 0\}$ *ke* $B = \{y | f_Y(y) > 0\}$ *dengan transformasi invers* $x = w(y)$. *Jika* $\frac{d}{dy} w(y)$ *kontinu dan tidak bernilai nol di B, maka fungsi kepekatan peluang dari Y adalah*

$$f_Y(y) = f_X\big(w(y)\big) \left| \frac{d}{dy} w(y) \right| \qquad , y \in B \tag{2.3.1}$$

Bukti. Jika suatu $Y = u(X)$ fungsi satu-satu maka Y merupakan salah satu fungsi monoton naik atau monoton turun. Jika pertama diasumsikan bahwa y fungsi monoton naik, maka $u(x) \leq y$ jika dan hanya jika $x \leq w(y)$, sehingga

$$F_Y(y) = P[u(X) \leq y] = P[X \leq w(y)] = F_X(w(y))$$

akibatnya

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(w(y))$$

$$= \frac{d}{d(w(y))} F_X(w(y)) \frac{d}{dy}(w(y))$$

karena pada kasus ini y fungsi monoton naik maka $\frac{d}{dy} w(y) > 0$

selanjutnya, untuk y diasumsikan monoton turun, maka $u(x) \leq y$ jika dan hanya jika $w(y) \leq x$, sehingga

$$F_Y(y) = P[u(X) \leq y] = P[X \geq w(y)] = 1 - F_X(w(y))$$

akibatnya

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}[1 - F_X(w(y))]$$

$$= -f_X(w(y))\frac{d}{dy}(w(y))$$

karena pada kasus ini y fungsi monoton turun maka $\frac{d}{dy}w(y) < 0$ dan $\frac{d}{dy}w(y) = -\left|\frac{d}{dy}w(y)\right|$, sehingga

$$f_Y(y) = f_X(w(y))\left|\frac{d}{dy}w(y)\right|$$

Jadi berdasarkan kedua kasus terbukti bahwa $f_Y(y) = f_X(w(y))\left|\frac{d}{dy}w(y)\right|$.

2.4 Fungsi Gamma dan Fungsi Beta

Berikut ini akan diuraikan definisi dan teorema terkait fungsi Gamma dan fungsi Beta.

2.4.1 Fungsi Gamma

Definisi 2.4.1 [1] *Fungsi Gamma dilambangkan dengan* $\Gamma(\kappa)$ *untuk* $\kappa > 0$, *diberikan oleh*

$$\Gamma(\kappa) = \int_0^\infty x^{\kappa-1}e^{-x}\,dx$$

Teorema 2.4.1 [1] *Sifat-sifat fungsi Gamma antara lain:*

1. $\Gamma(\kappa) = (\kappa - 1)\Gamma(\kappa - 1)$ $\quad \kappa > 1$ (2.4.1)
2. $\Gamma(n) = (n - 1)!$ $\quad n = 1,2, \ldots$ (2.4.2)
3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (2.4.3)

Bukti.

1. Diketahui fungsi Gamma pada Definisi 2.4.1 yaitu

$$\Gamma(\kappa) = \int_0^\infty x^{\kappa-1}e^{-x}\,dx$$

Misalkan $u = x^{\kappa-1}$ dan $dv = \exp(-x)\,dx$, maka diperoleh $du = (\kappa-1)x^{\kappa-2}\,dx$ dan $v = -\exp(-x)$. Dengan menggunakan integral parsial diperoleh fungsi Gamma:

$$\Gamma(\kappa) = \lim_{a\to\infty}\int_0^\infty x^{\kappa-1}e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(-x^{\kappa-1}e^{-x}\Big|_0^\infty\right) - \lim_{a\to\infty}\int_0^a -e^{-x}(\kappa-1)x^{\kappa-2}\,dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x}(\kappa-1)x^{\kappa-2}\,dx$$

$$= (\kappa-1)\int_0^\infty e^{-x}x^{\kappa-2}\,dx$$

Untuk $\kappa > 1$ akan menghasilkan rumus yang berulang yaitu

$\Gamma(\kappa) = (\kappa-1)\Gamma(\kappa-1)$

2. Dengan menerapkan Persamaan (2.4.1), diperoleh $\Gamma(n)$ sebagai berikut:

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$
$$\Gamma(n-1) = (n-2)\Gamma(n-2)$$
$$\Gamma(n-2) = (n-3)\Gamma(n-3)$$
$$\vdots$$
$$\Gamma(2) = \Gamma(1)$$

sehingga diperoleh:

$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)(n-3)\ldots(1)\Gamma(1)$

dengan $\Gamma(1) = \int_0^\infty x^{1-1} e^{-x}\, dx = 1$,

maka terbukti $\Gamma(n) = (n-1)!$

3. Misalkan $x = y^2$ sehingga $dx = 2y\, dy$, substitusikan pada fungsi Gamma sebagai berikut

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx = \int_0^\infty (y^2)^{n-1} e^{-y^2}\, 2y\, dy$$

$$= 2\int_0^\infty y^{2n-1} e^{-y^2}\, dy \tag{2.4.4}$$

dengan demikian

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty y^{2\left(\frac{1}{2}\right)-1} e^{-y^2}\, dy$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy$$

maka

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \left(2\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy\right)\left(2\int_0^\infty e^{-z^2}\, dz\right)$$

$$= 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(y^2+z^2)}\, dy\, dz \tag{2.4.5}$$

Untuk menyelesaikan Persamaan (2.4.5), lakukan transformasi koordinat kutub, misalkan $y = r\cos\theta$ dan $z = r\sin\theta$ sehingga $y^2 + z^2 = r^2$. Turunan parsial dari masing-masing peubah terhadap r dan θ adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta,$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \sin\theta\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

dengan demikian diperoleh Jacobian sebagai berikut

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta$$

$$= r$$

sehingga $dy\,dz = r\,dr\,d\theta$. Bila

$$y = 0 \Longrightarrow \theta = 0$$

$$z = 0 \Longrightarrow \ \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$r = 0 \Longrightarrow \ \theta = \infty$$

maka diperoleh

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{r}^2}\,\mathrm{r\,dr\,d\theta}$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{r}^2}}{2}\bigg|_0^{\infty}\right)\mathrm{d\theta}$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d\theta}$$

$$= 2\theta\,\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\frac{\pi}{2} - 0$$

$$= \pi$$

Jadi terbukti $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

2.4.2 Fungsi Beta

Definisi 2.4.2 [13] *Fungsi Beta didefinisikan sebagai*

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \qquad untuk\ \alpha,\beta > 0$$

dimana $\Gamma(\alpha)$ *adalah fungsi gamma.*

Teorema 2.4.2 [3] Sifat-sifat fungsi beta adalah:

1. $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \mathrm{B}(\beta,\alpha)$ (2.4.6)
2. $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2\alpha-1}\theta \cos^{2\beta-1}\theta\, d\theta$ (2.4.7)
3. $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int_0^{\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1-y)^{\alpha+\beta}}\, dy$ (2.4.8)

Bukti.

1. Diketahui bahwa fungsi Beta pada Definisi 2.4.6 yaitu

   $$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

   Dengan menggunakan metode transformasi $y = 1 - x$ maka $x = 1 - y$ dan $dx = -dy$, sehingga untuk $x \to 0$ maka $y \to 1$ dan untuk $x \to 1$ maka $y \to 0$. Jadi diperoleh:

   $$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int_1^0 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} -dy$$

   $$= \int_0^1 y^{\beta-1}(1-y)^{\alpha-1}\,dy$$

   $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \mathrm{B}(\beta,\alpha)$

   Jadi terbukti $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \mathrm{B}(\beta,\alpha)$.

2. Diketahui bahwa fungsi Beta pada Definisi 2.4.6 yaitu

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

Dengan menggunakan metode transformasi $x = \sin^2\theta$ maka $dx = 2\sin\theta\cos\theta$ sehingga

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^{\pi/2} (\sin^2\theta)^{\alpha-1}(\cos^2\theta)^{\beta-1} 2\ \sin\theta\cos\theta\ d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2\alpha-1}\theta\cos^{2\beta-1}\theta\ d\theta$$

Jadi terbukti $B(\alpha,\beta) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2\alpha-1}\theta\cos^{2\beta-1}\theta\,d\theta$.

3. Dengan menggunakan metode transformasi pada Definisi 2.4.6, $x = \frac{y}{1+y}$ maka $dx = \frac{1}{(1+y)^2}dy$ sehingga

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 \left(\frac{y}{1+y}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{y}{1+y}\right)^{\beta-1}\frac{1}{(1+y)^2}dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y}{1+y}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{1+y}\right)^{\beta-1}\frac{1}{(1+y)^2}dy$$

$$= \int_0^1 \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha-1+\beta-1}}\frac{1}{(1+y)^2}dy$$

$$= \int_0^1 \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\ dy$$

Jadi terbukti $B(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}}{(1-y)^{\alpha+\beta}}dy$.

2.5 Beberapa Distribusi Kontinu

Berikut ini diuraikan beberapa distribusi peubah acak kontinu yang digunakan pada tugas akhir ini.

2.5.1 Distribusi Normal

Distribusi Normal merupakan distribusi peluang kontinu yang sangat penting. Distribusi Normal secara sistematis bergantung pada parameter μ dan σ^2, dapat dinyatakan dengan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Adapun definisi distribusi Normal sebagai berikut:

Definisi 2.5.1[6] *Suatu peubah acak X yang dikatakan memiliki sebaran Normal dengan rata-rata μ dan variansi σ^2jika memiliki fungsi kepekatan peluang dalam bentuk*

$$f(x;\mu;\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \qquad \begin{array}{l} ,-\infty < x < \infty \\ ,-\infty < \mu < \infty \\ ,0 < \sigma^2 < \infty \end{array}$$

2.5.2 Distribusi Lognormal

Peubah acak kontinu X memiliki distribusi Lognormal apabila logaritma natural dari peubah acak tersebut adalah normal. Jadi, dimisalkan peubah Y adalah peubah acak kontinu dengan berdistribusi Lognormal dan X juga merupakan peubah acak kontinu dengan berdistribusi normal maka $X = \ln Y$ atau $Y = e^X$. Berdasarkan Teorema 2.3.1 maka distribusi peubah acak X dapat diperoleh dengan mentransformasi peubah acak $Y = \ln x$, yaitu

$$f_Y(y) = f_X\big(w(y)\big)\left|\frac{d}{dy}w(y)\right|$$

dengan $f_x\big(w(y)\big)$ adalah fungsi kepekaan peluang distribusi normal yaitu

$$f_X(w(y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

Karena x=w(y)= $\ln y$ maka $\frac{d}{dy}w(y) = \frac{1}{y}$.

Sehingga diperoleh:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)^2\right)\left|\frac{1}{y}\right|$$

$$= \left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

Jadi, fungsi kepekatan peluang distribusi Lognormal yang ditulis dengan $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ adalah:

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right) & , x > 0, \mu > 0, \sigma^2 > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

dengan μ adalah parameter lokasi dan σ merupakan parameter skala.

Teorema 2.5.1 [15] *Nilai harapan dan ragam dari X yang diasumsikan berdistribusi lognormal* $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ *yaitu:*

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \qquad dan \qquad Var(X) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

Bukti. Untuk $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ akan dibuktikan bahwa E(X)= $e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$

$$E(X) = \int_0^\infty x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty x\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right) dx$$

Misalkan $y = \frac{\ln x - \mu}{\sigma}$ atau $\ln x = y\sigma + \mu$ maka $x = \exp(y\sigma + \mu)$ dan $dx = \sigma \exp(y\sigma + \mu)\, dy$.

Dengan transformasi tersebut untuk $x \to 0^+$ maka $y \to -\infty$ dan untuk $x \to \infty$ maka $y \to \infty$, sehingga

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \sigma \exp(y\sigma + \mu)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{y^2}{2} + y\sigma + \mu\right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{y^2}{2} + y\sigma + \mu + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{2}\right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}(y-\sigma)^2\right) exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) dy$$

$$= exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}(y-\sigma)^2\right) dy$$

$$= exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

Jadi terbukti bahwa untuk $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ maka $\mu = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $Var(X) = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.

Perhatikan bahwa:

$$E(X^2) = \int_{0}^{\infty} x^2 f(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right) dx$$

Misalkan $y = \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)$ atau $\ln x = y\sigma + \mu$ maka $x = \exp(y\sigma + \mu)$ dan $dx = \sigma \exp(y\sigma + \mu)\, dy$.

Dengan transformasi tersebut untuk $x \to 0^+$ maka $y \to -\infty$ dan untuk $x \to \infty$ maka $y \to \infty$, sehingga

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{y\sigma+\mu}}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \sigma \exp(y\sigma+\mu)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{y^2}{2} + 2y\sigma + 2\mu\right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{y^2}{2} + 2y\sigma + 2\mu + 2\sigma^2 - 2\sigma^2\right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}(y-2\sigma)^2\right) exp(2\mu + 2\sigma^2)\, dy$$

$$= exp(2\mu + 2\sigma^2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}(y-2\sigma)^2\right) dy$$

$$= exp(2\mu + 2\sigma^2)$$

Sehingga,

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= exp(2\mu + 2\sigma^2) - \left(exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)^2$$

$$= exp(2\mu + 2\sigma^2) - exp(2\mu + \sigma^2)$$

$$= exp(2\mu + \sigma^2)\,(exp(\sigma^2) - 1)$$

Jadi terbukti Var(X)= $e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$.

2.5.3 Distribusi Uniform

Suatu peubah acak kontinu X diasumsikan berada di interval terbatas (a,b), dan misalkan fungsi kepekatan peluang dari X adalah konstan yaitu $f(x) = c$ di dalam interval. Karena $\int_a^b c\, dx = 1$ maka $c = \frac{1}{b-a}$. Sehingga distribusi ini disebut distribusi Uniform [1]:

Defenisi 2.5.2 [13] *Suatu peubah acak X dikatakan distribusi Uniform pada selang $a \leq x \leq b$ jika fungsi kepekatan peluangnya sebagai berikut:*

$$f(x;a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , \quad untuk \;\; a < x < b \\ 0 & , \qquad selainnya \end{cases}$$

Notasi yang menandakan bahwa peubah acak X mempunyai fungsi kepekatan peluang yang berdistribusi uniform adalah $X \sim Unif(a,b)$.

2.5.4 Distribusi Invers Gamma

Peubah acak X dikatakan berdistribusi Gamma, dinotasikan dengan $X \sim GAM(\theta,\kappa)$, jika fungsi kepekatan peluangnya didefinisikan dalam bentuk:

$$f(x) = \frac{1}{\theta^{\kappa}\Gamma(\kappa)} x^{\kappa-1} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) \qquad , x > 0, \kappa > 0 \; dan \; \theta > 0$$

dan nol untuk nilai x yang lain.

Dengan melakukan transformasi $Y = g(X) = \frac{1}{X}$ maka $y = \frac{1}{x} \Longrightarrow x = \frac{1}{y} = g^{-1}(y)$

$$\left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| = \left|\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y}\right)\right| = \frac{1}{y^2}$$

sehingga diperoleh:

$$f_Y(y) = f_X[g^{-1}(y)] \left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right|$$

$$= \frac{1}{\theta^{\kappa}\Gamma(\kappa)} \left(\frac{1}{y}\right)^{\kappa-1} \exp\left(\frac{1}{\theta y}\right) \frac{1}{y^2}$$

$$= \frac{1}{\theta^{\kappa}\Gamma(\kappa)} \left(\frac{1}{y}\right)^{\kappa+1} \exp\left(\frac{1}{\theta y}\right)$$

Jika $\kappa = \tau$, $\frac{1}{\theta} = \omega$ dan $x = y$, maka distribusi yang terbentuk adalah Invers Gamma, dinotasikan $Y \sim IG(\omega,\tau)$[14].

Definisi 2.5.3 [4] *Suatu peubah acak Y dikatakan memiliki distribusi Invers Gamma dengan parameter skala* $\omega > 0$ *dan parameter bentuk* $\tau > 0$ *dapat dinyatakan dengan* $Y \sim IG(\omega, \tau)$, *jika memiliki fungsi kepekatan peluang berbentuk:*

$$f(y;\omega,\tau) = \frac{\omega^\tau}{\Gamma(\tau)} y^{-(\tau+1)} \exp\left(-\frac{\omega}{y}\right) \qquad ,y > 0 \tag{2.5.1}$$

dan 0 selainnya.

Teorema 2.5.2 [4] *Nilai harapan dan ragam dari distribusi* $IG(\tau, \omega)$ *diberikan oleh:*

$$E(Y) = \frac{\omega}{\tau - 1}, \tau > 1$$

$$Var(Y) = \frac{\omega^2}{(\tau - 1)^2(\tau - 2)}, \tau > 2$$

Bukti. Untuk $Y \sim IG(\tau, \omega)$ akan dibuktikan bahwa $E(Y) = \frac{\omega}{\tau - 1}$,

$$E(Y) = \int_0^\infty y f(y)\, dy$$

$$= \int_0^\infty y \frac{\omega^\tau}{\Gamma(\tau)} y^{-(\tau+1)} \exp\left(-\frac{\omega}{y}\right) dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{\omega^\tau}{\Gamma(\tau)} y^{-\tau} \exp\left(-\frac{\omega}{y}\right) dy$$

$$= \frac{\omega^\tau}{\Gamma(\tau)} \int_0^\infty y^{-\tau} \exp\left(-\frac{\omega}{y}\right) dy$$

Misalkan P= $\frac{\omega}{y}$ atau $y = \frac{\omega}{P}$ maka $dy = -\frac{\omega}{P^2} dP$.

Dengan transformasi tersebut untuk $y \to 0^+$ maka $P \to \infty$ dan untuk $y \to \infty$ maka $P \to 0$, sehingga

$$E(Y) = \frac{\omega^\tau}{\Gamma(\tau)} \int_\infty^0 \left(\frac{\omega}{P}\right)^{-\tau} \exp(-P) \left(-\frac{\omega}{P^2}\right) dP$$

$$= \frac{\omega^\tau}{\Gamma(\tau)} \omega^{1-\tau} \int_0^\infty P^{\tau-2} \exp(-P)\, dP$$

$$= \frac{\omega\Gamma(\tau-1)}{\Gamma(\tau)}$$

$$= \frac{\omega\,(\tau-2)!}{(\tau-1)!}$$

$$= \frac{\omega}{(\tau-1)} \qquad (2.5.2)$$

Jadi terbukti bahwa untuk $Y \sim IG(\tau, \omega)$ maka $E(Y) = \frac{\omega}{\tau-1}$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $Var(Y) = \frac{\omega^2}{(\tau-1)^2(\tau-2)}$.

Perhatikan bahwa:

$$E(Y^2) = \int_0^\infty y^2 f(y)\, dy$$

$$= \int_0^\infty y^2 \frac{\omega^\tau}{\Gamma(\tau)} y^{-(\tau+1)} \exp\left(-\frac{\omega}{y}\right) dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{\omega^\tau}{\Gamma(\tau)} y^{-\tau+1} \exp\left(-\frac{\omega}{y}\right) dy$$

$$= \frac{\omega^\tau}{\Gamma(\tau)} \int_0^\infty y^{-\tau+1} \exp\left(-\frac{\omega}{y}\right) dy$$

Misalkan: P= $\frac{\omega}{y}$ atau $y = \frac{\omega}{P}$ maka $dy = -\frac{\omega}{P^2} dP$.

Dengan transformasi tersebut untuk $y \to 0^+$ maka P→ ∞ dan untuk $y \to \infty$ maka P→ 0, sehingga

$$E(Y^2) = \frac{\omega^\tau}{\Gamma(\tau)} \int_\infty^0 \left(\frac{\omega}{P}\right)^{-\tau+1} \exp(-P) \left(-\frac{\omega}{P^2}\right) dP$$

$$= \frac{\omega^\tau}{\Gamma(\tau)} \omega^{2-\tau} \int_0^\infty P^{\tau-3} \exp(-P)\, dP$$

$$= \frac{\omega^2\Gamma(\tau-2)}{\Gamma(\tau)}$$

$$= \frac{\omega^2 (\tau - 3)!}{(\tau - 1)!}$$

$$= \frac{\omega^2}{(\tau - 1)(\tau - 2)}$$

Sehingga,

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$

$$= \frac{\omega^2}{(\tau - 1)(\tau - 2)} - \frac{\omega^2}{(\tau - 1)^2}$$

$$= \frac{\omega^2 (\tau - 1) - \omega^2 (\tau - 2)}{(\tau - 1)^2 (\tau - 2)}$$

$$= \frac{\omega^2 (\tau - 1 - \tau + 2)}{(\tau - 1)^2 (\tau - 2)}$$

$$= \frac{\omega^2}{(\tau - 1)^2 (\tau - 2)} \tag{2.5.3}$$

Jadi terbukti bahwa untuk $Y \sim IG(\tau, \omega)$ maka $Var(Y) = \frac{\omega^2}{(\tau-1)^2(\tau-2)}$.

2.6 Teorema Bayes

Peluang suatu kejadian dipengaruhi oleh terjadi atau tidak terjadinya suatu kejadian lain. Peluang terjadinya suatu kejadian B bila diketahui bahwa kejadian A telah terjadi disebut peluang bersyarat dan dinyatakan dengan $P(B|A)$. Lambang $P(B|A)$ biasanya dibaca ‘peluang B terjadi bila diketahui A terjadi.

Definisi 2.6.1 [1] *Peluang bersyarat dari kejadian B bila kejadian A diketahui, dinyatakan dengan $P(B|A)$, ditentukan oleh*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{2.6.1}$$

bila P(A) > 0.

Bila kedua ruas persamaan (2.6.1) dikalikan dengan $P(A)$ maka diperoleh

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \tag{2.6.2}$$

Misalkan S adalah ruang sampel dari suatu percobaan dari $B_1, B_2, \dots, B_k$ adalah kejadian-kejadian di dalam S sedemikian sehingga $B_1, B_2, \dots, B_k$ saling lepas dan $\bigcup_{i=1}^{k} B_k = S$ dikatakan bahwa $B_1, B_2, \dots, B_k$ membentuk partisi di dalam S.

Teorema 2.6.1 [1] (Hukum Peluang Total) *Misalkan kejadian $B_1, B_2, \dots, B_k$ merupakan suatu partisi dari ruang sampel S dengan $P(B_i) \neq 0$ untuk $i = 1,2, \dots, k$, maka untuk setiap kejadian A anggota S*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i) \tag{2.6.3}$$

Bukti. Jika $B_1, B_2, \dots, B_k$ saling lepas dan terbatas, yang berarti bahwa $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k = S$, maka $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_k)$.

Sehingga,

$$\begin{aligned} P(A) &= P[(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_k)] \\ &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_k) \\ &= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_k)P(A|B_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i) \end{aligned}$$

Jadi terbukti P(A)= $\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)$

Suatu aturan sederhana yang terdapat pada Teorema Bayes untuk menghitung peluang bersyarat suatu kejadian B_i, bila A terjadi.

Teorema 2.6.2 [1] (Teorema Bayes) *Misalkan kejadian $B_1, B_2, \ldots, B_k$ merupakan suatu partisi ruang sampel S dengan $P(B_i) \neq 0$ untuk i = 1, 2, ..., k. Misalkan A suatu kejadian sebarang dalam S dengan $P(A) \neq 0$ maka*

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)}\ . \qquad (2.6.4)$$

Bukti. Berdasarkan Definisi 2.6.1 dan Teorema 2.6.1 diperoleh:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)}$$

Jadi terbukti bahwa $P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)}$.

2.7 Pendugaan Langsung

Pendugaan parameter dengan cara pendugaan langsung didasarkan pada data sampel yang diperoleh. Pendugaan dikatakan langsung apabila pendugaan terhadap parameter populasi di suatu domain hanya didasarkan pada data sampel dari domain tersebut. Pendugaan langsung dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

Nilai ragam dari suatu pendugaan digunakan untuk mengukur seberapa baik penafsiran parameter diperoleh. Apabila pendugaan memiliki nilai ragam yang lebih kecil dari pendugaan yang lain dapat dikatakan pendugaan tersebut pendugaan terbaikdari pendugaan yang lainnya. Nilai ragam dapat dicari dengan rumus sebagai berikut[11]:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})}{n-1}$$

2.8 Metode Bayes

Bayes memperkenalkan suatu metode pengestimasian parameter dimana kita perlu mengetahui bentuk distribusi awal (prior) dari parameter untuk mencari estimasi parameter θ dari populasi, yang dikenal dengan metode Bayes. Metode Bayes menggunakan distribusi prior $f(\theta)$ bersama dengan fungsi *likelihood* $L(\theta)$ untuk menentukan distribusi posterior $f(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)$.

2.8.1 Fungsi *Likelihood*

Fungsi *likelihood* dapat dilambangkan dengan $L(\theta)$ yang dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.8.1 [1] *Fungsi kepekatan peluang bersama dari n peubah acak* $X_1, X_2, \dots, X_n$ *yang dihitung pada* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *dinyatakan dalam bentuk* $f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)$ *dikatakan sebagai fungsi likelihood. Jika* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *ditetapkan, maka fungsi likelihood dari parameter* θ *dinotasikan dengan* $L(\theta)$. *Jika* $X_1, X_2, \dots, X_n$ *menyatakan suatu sampel acak yang saling bebas dari* $f(\boldsymbol{x};\theta)$, *maka:*

$$L(\theta) = f(x_1|\theta)f(x_2|\theta) \dots f(x_n|\theta) \tag{2.8.1}$$

Fungsi *likelihood* pada persamaan (2.7.1) juga dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

2.8.2 Distribusi Prior

Distribusi prior adalah distribusi awal yang memberikan informasi tentang parameter dalam metode Bayes. Distribusi prior dikelompokkan menjadi dua kelompok, yaitu[2]:

1. Distribusi prior yang berdasarkan bentuk distribusi hasil identifikasi pola data dari fungsi likelihoodnya yaitu:

   a) Distribusi prior konjugat

      Pada distribusi prior konjugat pemilihan prior mempertimbangkan pola fungsi *likelihood*nya. Untuk menentukan distribusi prior ini dipilih prior dari anggota keluarga distribusi yang sama dengan peubah acak, sehingga distribusi posterior yang dihasilkan berada dalam keluarga distribusi yang sama.

   b) Distribusi prior tidak konjugat

      Pada distribusi prior ini tidak berdasarkan pada hasil identifikasi pola datanya atau fungsi *likelihood*nya.

2. Distribusi prior yang berdasarkan informasi terdahulu terkait dengan penentuan masing-masing parameter pada pola distribusi prior tersebut,yaitu:

   a) Distribusi prior informatif

      Distribusi prior informatif digunakan berdasarkan informasi mengenai distribusi prior pada penelitian yang pernah dilakukan sebelumnya. Pemberian nilai parameter pada distribusi prior ini akan sangat mempengaruhi bentuk distribusi posterior yang akan didapat berdasarkan informasi data yang diperoleh.

   b) Distribusi prior non-informatif

Pada distribusi prior non-informatif digunakan untuk parameter model yang tidak berdasarkan informasi apapun terkait parameter tersebut. Distribusi prior non-informatif dapat didekati dengan menggunakan metode Jeffrey, yang akan dijelaskan pada Sub Bab 2.8.4.

2.8.3 Distribusi Posterior

Distribusi posterior adalah fungsi kepekatan peluang bersyarat yang digunakan untuk mengestimasi parameter yang tidak diketahui yang diperoleh dari penggabungan informasi data sampel yang dinyatakan dengan fungsi *likelihood* dan informasi awal mengenai parameter yang akan diduga, dinyatakan dengan distribusi prior.

Misalkan $f(x|\theta)$ adalah fungsi *likelihood* dari contoh acak $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $f(\theta)$ adalah distribusi prior dari θ, sehingga fungsi kepekatan peluang bersama dari θ dapat ditulis sebagai berikut :

$$f(x,\theta) = f(x|\theta)\, f(\theta) \tag{2.8.2}$$

Fungsi kepekatan peluang marginal dari x dapat dihitung dengan menggunakan rumus berikut :

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{\theta} f(x|\theta) f(\theta) & \text{, untuk } \theta \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x|\theta) f(\theta)\, d\theta & \text{, untuk } \theta \text{ kontinu} \end{cases}$$

Sehingga distribusi posterior dapat ditulis sebagai berikut :

$$f(\theta|x) = \frac{f(x,\theta)}{f(x)} \tag{2.8.3}$$

Berdasarkan uraian tersebut dapat didefinisikan distribusi posterior sebagai berikut:

Definisi 2.8.1 [1] Distribusi Posterior. *Fungsi kepekatan peluang bersyarat dari θ jika diketahui pengamatan sampel $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ disebut fungsi kepekatan peluang posterior, yang diberikan oleh:*

$$f(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)f(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x|\theta)f(\theta)\, d\theta}$$

Definisi 2.8.2 [1] *Nilai harapan dari distribusi posterior $f(\theta|x)$ dinyatakan dengan $\hat{\theta}$, disebut pendugaan Bayes untuk θ.*

2.8.4 Metode Jeffrey

Metode Jeffrey merupakan salah satu pendekatan dari prior non-informatif. Distribusi prior yang dihasilkan dengan menggunakan metode ini adalah hasil akar kuadrat dari informasi *Fisher* yang dinotasikan sebagai $I(\theta)$.

Aturan Jeffrey *Distribusi prior $f(\theta)$ dikatakan distribusi prior non-informatif dari parameter θ jika distribusi prior tersebut proporsional dengan akar dari informasi Fisher*[2].

$$f(\theta) \propto \sqrt{I(\theta)}$$

Informasi Fisher dari parameter θ untuk suatu peubah acak $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ didefinisikan sebagai berikut[4]:

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x;\theta)\right]$$

2.9 Uji Kolmogorov-Smirnov

Uji Kolmogorov-Smirnov adalah suatu uji statistik yang digunakan untuk mengetahui apakah suatu data mengikuti distribusi tertentu. Konsep dasar uji Kolmogorov-Smirnov adalah membandingkan fungsi distribusi frekuensi kumulatif empiris $F_n(x)$ dengan fungsi distribusi frekuensi kumulatif hipotesis $F_0(x)$.

Apabila terdapat *order* sampel $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yang berdistribusi sesuai dengan $F_0(x)$ dengan

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ \frac{b}{n}, & x_b \le x < x_{b+1} \\ 1, & x \ge x_n \end{cases} \quad , b = 1,2, \ldots, n-1$$

Jika sampel tersebut berasal dari populasi yang berdistribusi $F_n(x)$, maka uji Kolmogorov-Smirnov dilakukan dengan membandingkan setiap nilai $F_n(x)$ dengan nilai distribusi hipotesis $F_0(x)$. Selanjutnya statistik uji yang digunakan adalah jarak vertikal terbesar (maksimum) antara $F_n(x)$ dan $F_0(x)$ yang dinotasikan dengan D sehingga

$$D = \sup_x |F_n(x) - F_0(x)|$$

dengan hipotesis yang digunakan adalah:

$H_0: F(x) = F_0(x)$

$H_1: F(x) \neq F_0(x)$

Kriteria pengambilan keputusannya adalah H_0 akan ditolak jika $D > D_a$ dengan D_a adalah nilai kritis yang diperoleh dari tabel Kolmogorov-Smirnov atau tolak H_0 jika *p-value* $< \alpha$[7].

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Sumber Data

Sumber data pada skripsi ini diambil dari data rata-rata curah hujan di kota/kabupaten terpilih yang ada di Sumatera Barat pada tahun 2010 sampai dengan tahun 2017 yang diakses melalui aplikasi Allstats milik Badan Pusat Statistik. Kota/ kabupaten terpilih diambil berdasarkan dari kelengkapan informasi dan data yang tersedia di Badan Pusat Statistika. Kota/kabupaten terpilih yaitu: Kota Pariaman, Kota Solok, Kota Payakumbuh, Kabupaten Pesisir Selatan, Kabupaten Padang Pariaman, dan Kabupaten Dhamasraya.

3.2 Metode Analisa Data

Pada tugas akhir ini analisis data dilakukan dengan dua metode yang berbeda yaitu dengan melakukan studi analitik dan studi empirik. Dari studi analitik dihasilkan formula-formula yang kemudian digunakan pada studi empirik.

1. Studi Analitik

Berikut langkah-langkah pendugaan parameter dengan metode Bayes secara analitik:

1. Menentukan fungsi *likelihood* dari distribusi yang terpilih berdasarkan uji Kolmogorov-Smirnov.
2. Menentukan distribusi prior dengan menggunakan prior non-informatif untuk parameter pada distribusi yang terpilih.

3. Menentukan distribusi posterior yang diperoleh dengan mengalikan fungsi *likelihood* dan distribusi prior yang telah ditentukan sebelumnya dibagi dengan distribusi marginal dari parameter.
4. Menentukan *mean posterior* sebagai penduga titik yang diperoleh dari distribusi posterior yang telah dihasilkan sebelumnya.

2. Studi Empirik

Berikut langkah-langkah pendugaan parameter dengan metode Bayes secara empirik:

1. Mengidentifikasi distribusi data rata-rata curah hujan di kota/kabupaten terpilih yang ada di Sumatera Barat dengan menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov dengan menggunakan aplikasi Easyfit 5.6.
2. Menentukan *mean posterior* dari data rata-rata curah hujan bulanan di kota/kabupaten terpilih yang ada di Sumatera Barat dengan menggunakan formula yang telah dihasilkan pada studi analitik sebelumnya.
3. Membuat kesimpulan

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan diuraikan hasil dan pembahasan dari penelitian yang telah dilakukan.

4.1 Identifikasi Distribusi Data

Untuk data rata-rata curah hujan biasanya distribusi statistik yang dipertimbangkan sebagai distribusi peubah acak adalah distribusi Lognormal[9]. Untuk itu pada penelitian ini akan diawali dengan pengindetifikasian distribusi untuk setiap kelompok data dengan menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov. Pertama dilakukan uji Kolmogorov-Smirnov pada data rata-rata curah hujan di Kota Pariaman, hipotesa yang digunakan adalah

H_0 : Data curah hujan di Kota Pariaman mengikuti distribusi Lognormal

H_1 : Data curah hujan di Kota Pariaman tidak mengikuti distribusi Lognormal

Berdasarkan perhitungan uji Kolmogorov-Smirnov pada Easyfit, bahwa pada data rata-rata curah hujan di Kota Pariaman diperoleh nilai *p-value* sebesar 0,35825, karena *p-value* > 0,05 maka terima H_0 dan disimpulkan data rata-rata curah hujan di Kota Pariaman mengikuti distribusi Lognormal.

Selanjutnya dilakukan uji Kolmogorov-Smirnov dengan cara yang sama pada data rata-rata curah hujan di Kota Payakumbuh, diperoleh nilai *p-value* sebesar 0,33272. Karena *p-value* > 0,05 maka terima H_0 dan disimpulkan data rata-rata curah hujan di Kota Payakumbuh mengikuti distribusi Lognormal.

Pada data rata-rata curah hujan bulanan di Kota Solok dengan melakukan uji Kolmogorov-Smirnov diperoleh nilai *p-value* sebesar 0,16636, karena *p-value*

> 0,05 maka terima H_0 dan disimpulkan data rata-rata curah hujan bulanan di Kota Solok mengikuti distribusi Lognormal.

Langkah yang sama juga dilakukan pada data rata-rata curah hujan di Kabupaten Dhamasraya, Kabupaten Pesisir Selatan, dan Kabupaten Padang Pariaman. Sehingga diperoleh masing-masing nilai *p-value* sebesar 0,5216, 0,53589 dan 0,56391. Karena masing-masing nilai *p-value*>0.05 maka data rata-rata curah hujan di Kabupaten Dhamasraya, Kabupaten Pesisir Selatan, dan Kabupaten Padang Pariaman mengikuti distribusi Lognormal.

4.2 Inferensi Bayesian untuk Distribusi Lognormal

Pada pembahasan sebelumnya diketahui bahwa distribusi yang terpilih adalah distribusi Lognormal. Distribusi Lognormal memiliki dua buah parameter, yaitu parameter lokasi (μ) dan parameter skala (σ).

Pada penelitian ini untuk mencari pendugaan terhadap kedua parameter dari distribusi Lognormal dengan menggunakan metode Bayes. Dalam metode Bayes pendugaan parameter didasarkan pada distribusi posterior. Distribusi posterior diperoleh hasilkali antara distribusi prior dan fungsi *likelihood*. Prior yang digunakan pada penelitian ini adalah prior non-informatif. Berikut ini akan ditentukan fungsi *likelihood*, distribusi prior dan distribusi posterior untuk parameter μ dan σ dari distribusi Lognormal.

4.2.1 Fungsi *likelihood* dari distribusi Lognormal

Jika $X_i, \dots, X_n$ peubah acak berdistribusi Lognormal dengan $X_i \sim LN(\mu, \sigma^2)$ maka fungsi kepekatan peluangnya berdasarkan Teorema 2.6.1 adalah sebagai berikut:

$$f(x_i|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{x_i \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\ln x_i - \mu)^2\right), i = 1,2,\dots,n \quad (4.2.1)$$

Untuk $x_i > 0, -\infty < \mu < \infty$, dan $\sigma^2 > 0$.

Dengan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah nilai dari contoh acak berdistribusi Lognormal. Sehingga diperoleh fungsi *likelihood*nya yaitu:

$$\begin{aligned} L(\mu,\sigma^2) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\mu,\sigma^2) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\ln x_i - \mu)^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\ln x_i - \mu)^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (\ln x_i - \mu)^2\right] \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

4.2.2 Prior Non-Informatif

Suatu peubah acak X berdistribusi Lognormal dua parameter yaitu μ dan σ^2 dinotasikan $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$. Misalkan ϑ suatu peubah acak dimana $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$. Diasumsikan bahwa μ dan σ^2 saling bebas sehingga $f(\vartheta) = f(\mu) f(\sigma^2)$. Untuk mendapatkan nilai prior non-informatif bagi $f(\vartheta)$ maka akan ditentukan nilai prior non-informatif untuk $f(\mu)$ dan $f(\sigma^2)$ terlebih dahulu.

1. Distribusi Prior bagi $f(\sigma^2)$

Distribusi prior non-informatif $f(\sigma^2)$ diperoleh dengan menggunakan metode Jeffrey. Berdasarkan aturan Jeffrey ditulis bahwa:

$$f(\sigma^2) \propto \sqrt{I(\sigma^2)}$$

dimana $I(\sigma^2)$ adalah informasi *Fisher* yang didefinisikan dengan:

$$I(\sigma^2) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x_i|\mu,\sigma^2)}{\partial(\sigma^2)^2}\right]$$

Diketahui bahwa $X \sim LN(\mu,\sigma^2)$ dengan fungsi kepekatan peluang yang ditunjukkan pada persamaan (4.3.1):

$$f(x_i|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{x_i\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\ (\ln x_i - \mu)^2\right)$$

$$\ln f(x_i|\mu,\sigma^2) = \ln\left(\frac{1}{x_i\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\ (\ln x_i - \mu)^2\right)\right)$$

$$\ln f(x_i|\mu,\sigma^2) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2}\ln({x_i}^2) - \frac{(\ln x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

Turunan pertama dan kedua masing-masing dari $\log f(x_i|\mu,\sigma^2)$ yaitu:

$$\frac{\partial\ \ln f(x_i|\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2} = -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{(\ln x_i - \mu)^2}{2(\sigma^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2\ \ln f(x_i|\mu,\sigma^2)}{\partial(\sigma^2)^2} = -\frac{1}{2(\sigma^2)^2} - \frac{(\ln x_i - \mu)^2}{2(\sigma^2)^3}$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^4} - \frac{(\ln x_i - \mu)^2}{2\sigma^6}$$

Diperoleh informasi *Fisher* untuk σ^2 yaitu:

$$I(\sigma^2) = -E\left[-\frac{1}{2\sigma^4} - \frac{(\ln x_i - \mu)^2}{2\sigma^6}\right]$$

$$= -E\left[\frac{1}{2\sigma^4}\right] - E\left[\frac{(\ln x_i - \mu)^2}{2\sigma^6}\right]$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^4} - \frac{1}{2\sigma^6} E[(\ln x_i - \mu)^2]$$

Diketahui $E[(\ln x_i - \mu)^2] = \sigma^2$ maka

$$= -\frac{1}{2\sigma^4} - \frac{1}{2\sigma^6}\sigma^2$$

$$= -\frac{1}{\sigma^4}$$

Sehingga prior non-informatif untuk $f(\sigma^2)$ yaitu:

$$f(\sigma^2) = \sqrt{|I(\sigma^2)|}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\sigma^4}}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \tag{4.2.3}$$

2. Distribusi Prior bagi $f(\mu)$

Distribusi prior non-informatif untuk $f(\mu)$ dipilih distribusi Uniform dengan $0 < \mu < b$. Diasumsikan bahwa interval fungsi pada distribusi uniform bernilai konstan. Misalkan $b = 1$, maka distribusi prior untuk $f(\mu)$ yaitu:

$$f(\mu) = \frac{1}{b - 0}$$

$$= \frac{1}{1 - 0}$$

$$= 1 \tag{4.2.4}$$

Sehingga diperoleh prior non-informatif untuk $f(\vartheta)$ berdasarkan dari persamaan (4.2.3) dan persamaan (4.2.4) yaitu:

$$f(\vartheta) = f(\sigma^2)f(\mu)$$

$$\propto \frac{1}{\sigma^2} \tag{4.2.5}$$

4.2.3 Distribusi Posterior

Distribusi posterior dari peubah acak $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$ dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$f(\vartheta|x) = \frac{f(x,\vartheta)}{f(x)}$$

$$= \frac{f(x|\vartheta)f(\vartheta)}{\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x|\vartheta)f(\vartheta)\, d\mu\, d\sigma^2} \tag{4.2.6}$$

Pertama, akan ditentukan $f(x,\vartheta) = f(x|\vartheta)f(\vartheta)$ berdasarkan dari persamaan (4.2.2) dan persamaan (4.2.5) yaitu:

$$f(x,\vartheta) \propto \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x - \mu)^2\right]\frac{1}{\sigma^2}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x - \mu)^2\right]$$

$$= \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{n}\ln x_i + n\mu^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{n}\ln x_i + n\mu^2 + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2}{n} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2}{n} + n\mu^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{n}\ln x_i + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2}{n} + n\left(\mu^2 - \frac{2\mu\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n} + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2}{n^2}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2}{n} + n\left(\mu - \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}\right)^2\right)\right]$$

Transformasi $\beta = \sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2}{n}$ maka diperoleh:

$$= \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\beta + n\left(\mu - \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}\right)^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}} \exp\left[-\frac{\beta}{2\sigma^2} - \frac{n}{2\sigma^2}\left(\mu - \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}} \exp\left[-\frac{\beta}{2\sigma^2}\right] \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}\left(\mu - \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}\right)^2\right] \qquad (4.2.7)$$

Selanjutnya akan ditentukan $f(x) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x|\vartheta) f(\vartheta)\, d\mu\, d\sigma^2$.

Pertama integralkan persamaan (4.2.7) terhadap μ yaitu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\vartheta)\, d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-\frac{\beta}{2\sigma^2}\right]}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}} \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}\left(\mu - \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}\right)^2\right] d\mu$$

$$= \frac{\exp\left[-\frac{\beta}{2\sigma^2}\right]}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}\left(\mu - \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}\right)^2\right] d\mu$$

$$= \frac{\exp\left[-\frac{\beta}{2\sigma^2}\right]}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{n\left(\mu - \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}\right)^2}{2\sigma^2}\right] d\mu$$

Misalkan $t = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\mu - \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}\right)^2$ sehingga

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\vartheta)\, d\mu = \frac{\exp\left[-\frac{\beta}{2\sigma^2}\right]}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] \frac{\sigma}{\sqrt{n}} dt$$

$$= \frac{\exp\left[-\frac{\beta}{2\sigma^2}\right]}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}} \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt$$

Karena $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right]$ sesuai dengan frekuensi kepekatan peluang dari t berdistribus Lognormal, maka $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt = 1$ sehingga diperoleh:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\vartheta)\, d\mu = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} (\sigma^2)^{-\frac{n+1}{2}} \exp\left[-\frac{\beta}{2\sigma^2}\right] \tag{4.2.8}$$

Selanjutnya persamaan (4.2.8) diintegral terhadap σ^2 sebagai berikut:

$$f(x) = \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} (\sigma^2)^{-\frac{n+1}{2}} \exp\left[-\frac{\beta}{2\sigma^2}\right] d\sigma^2$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \int_0^{\infty} (\sigma^2)^{-\frac{n+1}{2}} \exp\left[-\frac{\beta}{2\sigma^2}\right] d\sigma^2$$

Misalkan $r = \beta/2\sigma^2$ sehingga $\sigma^2 = \beta/2r$ dan $d\sigma^2 = -\beta/2r^2\, dr$. Dengan transformasi $\sigma^2 \to 0$ maka $r \to \infty$ dan untuk $\sigma^2 \to \infty$ maka $r \to 0$.

$$f(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \int_{\infty}^{0} -\frac{\beta}{2r^2} \left(\frac{\beta}{2r}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \exp[-r]\, dr$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{-\frac{n-1}{2}} \int_0^{\infty} r^{\left(\frac{n-1}{2}\right)-1} \exp[-r]\, dr$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{-\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \tag{4.2.9}$$

Sehingga berdasarkan persamaaan (4.2.6) diperoleh distribusi posterior bersama yaitu dengan menggunakan persamaan (4.2.7) dan (4.2.9) sebagai berikut:

$$f(\vartheta|x) \propto \frac{\frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}} \exp\left[-\frac{\beta}{2\sigma^2}\right] \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}\left(\mu - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right)^2\right]}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{-\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \exp\left[-\frac{\beta}{2\sigma^2}\right] \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}\left(\mu - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right)^2\right] \quad (4.2.10)$$

Dari distribusi posterior bersama pada persamaan (4.2.10), akan dicari distribusi posterior marjinal bagi μ dan σ^2. Pertama akan dicari distribusi posterior marjinal bagi μ dengan mengintegralkan distribusi posterior bersama terhadap σ^2 sebagai berikut:

$$f(\mu|x) \propto \int_0^\infty \frac{\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \exp\left[-\frac{\beta + n\left(\mu - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right)^2}{2\sigma^2}\right] d\sigma^2$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}} \exp\left[-\frac{\beta + n\left(\mu - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right)^2}{2\sigma^2}\right] d\sigma^2$$

Misalkan $r = \frac{\beta + n\left(\mu - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i / n\right)^2}{2\sigma^2}$ sehingga $\sigma^2 = \frac{\beta + n\left(\mu - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i / n\right)^2}{2r}$ dan $d\sigma^2 = -\frac{\beta + n\left(\mu - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i / n\right)^2}{2r^2} dr$. Dengan transformasi $\sigma^2 \to 0$ maka $r \to \infty$ dan untuk $\sigma^2 \to \infty$ maka $r \to 0$. Jadi diperoleh distribusi posterior marjinal bagi μ sebagai berikut

$$f(\mu|x) \propto \frac{\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_\infty^0 -\frac{\beta + n\left(\mu - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right)^2}{2r^2} \left[\frac{\beta + n\left(\mu - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right)^2}{2r}\right]^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} \exp(-r)\, dr$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left[\frac{\beta + n\left(\mu - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right)^2}{2}\right]^{-\frac{n}{2}} \int_0^\infty r^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \exp(-r)\, dr$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left[\frac{2}{\beta + n\left(\mu - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right)^2}\right]^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{n}{\beta}}}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)\left[1 + \frac{n}{\beta}\left(\mu - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}} \tag{4.2.11}$$

Selanjutnya akan ditentukan *mean posterior* bagi μ dengan cara sebagai berikut:

$$\hat{\mu}_{Bayes} = E(\mu|x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{n}{\beta}}\mu}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)\left[1 + \frac{n}{\beta}\left(\mu - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}} d\mu$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{n}{\beta}}}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{\left[1 + \frac{n}{\beta}\left(\mu - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}} d\mu \tag{4.2.12}$$

Pertama akan dicari terlebih dahulu nilai dari integral dari persamaan (4.2.12). Dimisalkan $t = \sqrt{\frac{n}{\beta}}\left(\mu - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right)\sqrt{n-1}$ sehingga diperoleh:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\frac{\beta}{n}} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right)\sqrt{\frac{\beta}{n}}\frac{dt}{\sqrt{n-1}}}{\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{t}{n-1}\, dt}{\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\sqrt{\frac{\beta}{n}}\frac{dt}{\sqrt{n-1}}}{\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}}$$

Misalkan $r = 1 + \frac{t^2}{n-1}$ maka $\frac{dr}{2} = \frac{t\, dt}{n-1}$. Sehingga diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\frac{\beta}{n}}+\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right)\sqrt{\frac{\beta}{n}}\frac{dt}{\sqrt{n-1}}}{\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{2(n-1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dr}{(r)^{\frac{n}{2}}} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\sqrt{\frac{\beta}{n}}\frac{dt}{\sqrt{n-1}}}{\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}}$$

$$= \frac{2}{2(n-1)(2-n)}\frac{1}{y^{\frac{n}{2}+1}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\sqrt{\frac{\beta}{n}}\frac{dt}{\sqrt{n-1}}}{\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}}$$

Karena hasil integral bernilai nol maka diperoleh *mean posterior* bagi μ sebagai berikut:

$$\hat{\mu}_{Bayes} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{\mathrm{n}\sqrt{\mathrm{n}-1}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}}dt$$

$$= \frac{2\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{\mathrm{n}\sqrt{\mathrm{n}-1}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\right)}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}}dt$$

Misalkan $r = \frac{t^2}{n-1}$ sehingga $t = \sqrt{r(n-1)}$ dan $dt = \frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{r}}dr$. Jadi diperoleh :

$$\hat{\mu}_{Bayes} = \frac{2\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{\mathrm{n}\sqrt{\mathrm{n}-1}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\right)}\int_{0}^{\infty}\frac{\frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{r}}}{(1+r)^{\frac{n}{2}}}dr$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{\mathrm{nB}\left(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\right)}\int_{0}^{\infty}\frac{r^{-\frac{1}{2}}}{(1+r)^{\frac{n}{2}}}dr$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{\mathrm{n}} \tag{4.2.13}$$

Selanjutnya akan dicari distribusi posterior marjinal bagi σ^2 dengan mengintegralkan distribusi posterior bersama pada persamaan (4.2.10) terhadap μ sebagai berikut:

$$f(\sigma^2|x) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \exp\left[-\frac{\beta}{2\sigma^2}\right]}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \exp\left[-\frac{n\left(\mu-\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}\right)^2}{2\sigma^2}\right] d\mu$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \exp\left[-\frac{\beta}{2\sigma^2}\right]}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{n\left(\mu-\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}\right)^2}{2\sigma^2}\right] d\mu$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \exp\left[-\frac{\beta}{2\sigma^2}\right]}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (\sigma^2)^{-\left(\frac{n-1}{2}+1\right)} \exp\left[-\frac{\beta}{2\sigma^2}\right] \tag{4.2.14}$$

Dapat dilihat dari persamaan (2.5.1) bahwa distribusi posterior marjinal bagi σ^2 proposional terhadap distribusi Invers Gamma (τ, ω) dimana τ= (n-1)/2 dan $\omega = \beta/2$. Dengan demikian dapat ditulis:

$$\sigma^2\,|\boldsymbol{x} \sim IG\left(\frac{n-1}{2}, \frac{\beta}{2}\right) \tag{4.2.15}$$

Selanjutnya akan ditentukan min posterior bagi σ^2 dari distribusi Invers Gamma dengan berdasarkan persamaan (2.5.2) yang menyatakan bahwa untuk $X \sim IG(\tau, \omega)$ maka $E(X) = \frac{\omega}{\tau-1}$.

Sehingga untuk $\sigma^2|x \sim IG\left(\frac{n-1}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$ maka *mean posterior* untuk σ^2 adalah:

$$\widehat{\sigma^2}_{Bayes} = E(\sigma^2|x)$$

$$= \frac{\frac{\beta}{2}}{\frac{n-1}{2} - 1}$$

$$= \frac{\beta}{n-3} \tag{4.2.16}$$

4.3 Studi Kasus (Pendugaan Rata-rata Curah Hujan di Kabupaten/Kota Terpilih di Sumatera Barat)

Pada subbagian 4.2 telah dihasilkan formula untuk menduga rata-rata atau μ dan varian, atau σ^2 dari distribusi Lognormal dengan metode Bayes, yaitu dituliskan pada persamaan (4.2.13) dan (4.2.16). Formula tersebut selanjutnya digunakan untuk menduga μ dan σ^2 untuk data kasus pada tugas akhir ini yaitu dugaan μ dan σ^2 data curah hujan di enam kota/kabupaten terpilih di Sumatera Barat.

Berikut ini adalah nilai hasil pendugaan parameter secara langsung dan pendugaan parameter secara tak langsung (dengan metode Bayes) pada data rata-rata curah hujan di beberapa kota/kabupaten terpilih yang ada di Sumatra Barat.

Tabel 4.3.1 Nilai Pendugaan Parameter Secara Langsung dan Tidak Langsung

No	Kota/Kabupaten	Pendugaan Langsung		Pendugaan dengan Metode Bayes	
		$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\mu}_{Bayes}$	$\hat{\sigma}^2{}_{Bayes}$
1	Pariaman	5,674	0,245	5,674	0,245
2	Solok	5,044	0,971	5,044	0,487
3	Payakumbuh	4,782	1,519	4,782	0,598
4	Pesisir Selatan	5,382	0,340	5,382	0,213
5	Padang Pariaman	5,774	0,186	5,774	0,185
6	Dhamasraya	4,919	1,329	4,919	0,658

Berdasarkan Tabel 4.3.1 dapat dilihat bahwa nilai hasil pendugaan parameter secara langsung dan pendugaan parameter secara dengan metode Bayes menghasilkan nilai dugaan *mean* yang hampir sama. Tabel 4.3.1 di atas juga menginformasikan bahwa nilai dugaan varian yang dihasilkan dengan metode bayes menghasilkan nilai dugaan yang lebih kecil dari pada penduga langsung. Nilai dugaan varian yang lebih kecil dapat digunakan sebagai kriteria menentukan metode penduga yang lebih baik. Dengan demikian, pada penelitian ini metode penduga parameter dengan metode Bayes merupakan metode pendugaan yang lebih baik dibanding metode penduga secara langsung karena menghasilkan nilai dugaan varian yang lebih kecil.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan dari tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Dengan menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov pada taraf 5% pada data rata-rata curah hujan kota/kabupaten terpilih yang ada di Sumatera Barat pada tahun 2010 sampai dengan tahun 2017 diperoleh bahwa data mengikuti distribusi Lognormal.
2. Dengan menggunakan metode Bayes diperoleh nilai dugaan untuk parameter μ dan σ^2 sebagai berikut:

$$\hat{\mu}_{Bayes} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{\mathrm{n}}$$

$$\hat{\sigma}^2{}_{Bayes} = \frac{\beta}{n-3}$$

3. Nilai pendugaan Bayes (pendugaan tak langsung) lebih baik dari pada nilai pendugaan langsung terhadap data rata-rata curah hujan di kota/kabupaten terpilih yang ada di Sumatera Barat karena menghasilkan nilai dugaan dengan varian yang lebih kecil.

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini dibahas mengenai pendugaan parameter dari data rata-rata curah hujan di kota/kabupaten terpilih yang ada di Sumatera Barat dengan menggunakan metode Bayes dengan prior non informatif. Penulis menyarankan untuk penelitian selanjunya menduga parameter dari distribusi yang berbeda, penentuan distribusi prior yang berbeda dan mengimplementasikannya pada kasus yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bain, L.J and M. Engelhardt. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistic Second Edition*. Duxbury Press, California.

[2] Box, G.E.P and G.C. Tiao. 1973. *Bayesian inference in Statistical Analysis*. Addision- Publishing Company, Inc, Philippines.

[3] Carlson, B.C. 1977. *Special Function of Applied Mathematics*. Academic press. New York.

[4] Gelman, A. et all. 2014. *Bayesian Data Analysis Third Edition*. Taylor and Francis Group, LLC.

[5] Hasanah, U. 2018. Pendugaan Parameter dari Distribusi Gamma dengan Metode Bayes. *Skripsi S1*, tidak diterbitkan. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas. Padang.

[6] Hogg, R.V. and A.T. Craig.1905. *Introduction to Mathematical Statistics Seventh Edition.* Pearson Education, Inc: United States of America.

[7] Lehmann, E.L. and J.P. Ramano. 2005. *Testing Statistical Hyphotesis Third Edition*. Spiringer Science+Business Media, New York.

[8] Lilla, S.M. 2018. Inferensia Bayesian untuk Distribusi Poisson. *Skripsi S1*, tidak diterbitkan. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas. Padang.

[9] Mukid, M.A dan Yuciana W. 2012. Identifikasi Pola Distribusi Curah Hujan Maksimum dan Pendugaan Parameter Menggunakan Metode Bayesian Markov Chain Monte Carlo. *Media Statistika*. Vol 5: 63-74.

[10] Rahmadiah, A. 2018. Inferensia Bayesian pada Distribusi Eksponensial. *Skripsi S1*, tidak diterbitkan. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas. Padang.

[11] Sceaffer, R.L., W. Mendenhall and R.L. Ott. 2006. *Elementary Survey Sampling.* Thomson, America

[12] Soewarno. 1995. Hidrologi Aplikasi Metode Statistik Untuk Analisis Data. Nova, Bandung.

[13] Spiegel, M.R, J.J. Schiller and R.A Srinivasan. 2009. *Probability and Statistics Third Edition*. The McGraw-Hill Companies Inc, New York.

[14] Sugito dan D. Ispriyanti. 2010. Distribusi Invers Gamma pada Inferensi Bayesian. *Media Statistika*. Vol.3 : 59-68.

[15] Walpole, R.E dan R.H. Myers. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan.* ITB, Bandung.

LAMPIRAN 1

Data Rata-Rata Curah Hujan Bulanan di Kota Pariaman pada Tahun 2010 sampai Tahun 2017 dalam Satuan mm^3/jam

Bulan	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Januari	296,0	288,0	154,0	135,0	320,0	190,0	469,7	431,0
Februari	455,0	164,0	254,0	325,0	165,0	325,0	219,5	178,0
Maret	685,0	269,0	220,0	291,0	187,0	436,0	638,5	350,0
April	375,0	399,0	282,0	411,0	252,0	453,0	545,5	281,0
Mei	314,0	47,0	116,0	169,0	397,0	291,0	357,1	356,0
Juni	232,0	353,0	71,0	170,0	143,0	383,0	197,9	114,0
Juli	185,0	166,0	175,0	189,0	188,0	159,0	231,6	259,0
Agustus	373,0	320,0	242,0	291,0	197,0	270,0	316,4	280,0
September	371,0	459,0	261,0	353,0	315,0	339,0	406,5	464,0
Oktober	341,0	393,0	372,0	464,0	289,0	110,0	456,3	357,0
November	396,0	711,0	406,0	474,0	748,0	610,0	388,9	414,0
Desember	211,0	462,0	407,0	673,0	220,0	344,0	316,8	561,0

Data Transformasi Lognormal terhadap Data Asli

Bulan	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Januari	5,690	5,663	5,037	4,905	5,768	5,247	6,152	6,066
Februari	6,120	5,099	5,537	5,784	5,106	5,784	5,391	5,182
Maret	6,529	5,595	5,393	5,673	5,231	6,077	6,459	5,857
April	5,927	5,988	5,641	6,018	5,529	6,115	6,301	5,638
Mei	5,749	3,850	4,753	5,129	5,983	5,673	5,878	5,874
Juni	5,447	5,866	4,262	5,135	4,962	5,948	5,287	4,736
Juli	5,220	5,111	5,164	5,241	5,236	5,068	5,445	5,556
Agustus	5,922	5,768	5,488	5,673	5,283	5,598	5,757	5,634
September	5,916	6,129	5,564	5,866	5,752	5,826	6,007	6,139
Oktober	5,831	5,973	5,918	6,139	5,666	4,700	6,123	5,877
November	5,981	6,566	6,006	6,161	6,617	6,413	5,963	6,025
Desember	5,351	6,135	6,008	6,511	5,393	5,840	5,758	6,329

LAMPIRAN 2

Data Rata-Rata Curah Hujan Bulanan di Kota Solok pada Tahun 2010 sampai Tahun 2017 dalam Satuan mm^3/jam

Bulan	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Januari	273,2	291,0	77,0	182,0	163,0	196,0	275,0	200,0
Februari	194,5	236,0	205,0	198,0	122,0	257,0	280,0	130,0
Maret	357,3	195,0	41,0	161,0	139,0	134,0	238,0	272,0
April	291,5	212,0	226,0	363,0	233,0	225,0	275,0	163,0
Mei	128,7	197,0	52,0	98,0	327,0	210,0	133,0	194,0
Juni	154,2	80,0	72,0	118,0	171,0	172,0	59,0	129,0
Juli	145,2	79,0	159,0	131,0	80,0	30,0	56,0	27,0
Agustus	143,5	110,0	137,0	114,0	187,0	73,0	100,0	167,0
September	153,2	557,0	112,0	161,0	64,0	52,0	56,0	213,0
Oktober	77,0	514,0	258,0	275,0	302,0	44,0	90,0	29,0
November	147,5	754,0	343,0	164,0	363,0	413,0	150,0	241,0
Desember	23,5	670,0	235,0	320,0	130,0	268,0	132,0	249,0

Data Transformasi Lognormal terhadap Data Asli

Bulan	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Januari	5,610	5,673	4,343	5,204	5,093	5,278	5,616	5,298
Februari	5,270	5,463	5,323	5,288	4,804	5,549	5,634	4,867
Maret	5,878	5,273	3,713	5,081	4,934	4,897	5,472	5,605
April	5,675	5,356	5,420	5,894	5,451	5,416	5,616	5,093
Mei	4,857	5,283	3,951	4,584	5,789	5,347	4,890	5,267
Juni	5,038	4,382	4,276	4,770	5,141	5,147	4,077	4,859
Juli	4,978	4,369	5,068	4,875	4,382	3,401	4,025	3,2958
Agustus	4,966	4,700	4,919	4,736	5,231	4,290	4,605	5,117
September	5,032	6,322	4,718	5,081	4,158	3,951	4,025	5,361
Oktober	4,343	6,242	5,552	5,616	5,710	3,784	4,499	3,367
November	4,993	6,625	5,837	5,099	5,894	6,023	5,010	5,484
Desember	3,157	6,507	5,459	5,768	4,867	5,590	4,882	5,517

LAMPIRAN 3

Data Rata-Rata Curah Hujan Bulanan di Kota Payakumbuh pada Tahun 2010 sampai Tahun 2017 dalam Satuan mm^3/jam

Bulan	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Januari	251,0	146,0	26,3	54,0	93,0	174,5	417,0	107,0
Februari	140,0	162,0	71,7	87,6	33,0	132,5	126,0	131,0
Maret	267,0	135,0	52,8	170,6	112,0	198,5	258,0	379,0
April	454,0	278,0	61,4	186,0	271,0	35,5	223,0	252,0
Mei	160,0	260,0	50,2	47,0	263,0	188,0	177,0	224,0
Juni	244,0	59,0	49,8	76,8	85,0	159,0	46,0	96,0
Juli	127,0	17,0	53,2	74,1	82,0	22,5	55,0	53,0
Agustus	179,0	109,0	29,8	94,0	286,0	41,0	48,0	191,0
September	330,0	264,0	26,3	116,6	167,0	95,0	61,0	223,0
Oktober	213,0	233,0	52,4	105,0	176,0	64,0	62,0	66,0
November	180,0	332,0	46,7	128,3	485,0	392,0	202,0	284,0
Desember	176,0	439,0	50,3	119,3	97,0	169,5	122,0	244,0

Data Transformasi Lognormal terhadap Data Asli

Bulan	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Januari	5,525	4,983	3,269	3,988	4,532	5,161	6,033	4,672
Februari	4,941	5,087	4,272	4,472	3,496	4,886	4,836	4,875
Maret	5,587	4,905	3,966	5,139	4,718	5,290	5,552	5,937
April	6,118	5,627	4,117	5,225	5,602	3,569	5,407	5,529
Mei	5,075	5,560	3,916	3,850	5,572	5,236	5,176	5,411
Juni	5,497	4,077	3,908	4,341	4,442	5,068	3,828	4,564
Juli	4,844	2,833	3,974	4,306	4,406	3,113	4,007	3,970
Agustus	5,187	4,691	3,394	4,543	5,655	3,713	3,871	5,252
September	5,799	5,575	3,269	4,758	5,117	4,553	4,110	5,407
Oktober	5,361	5,451	3,958	4,653	5,170	4,158	4,127	4,189
November	5,192	5,805	3,843	4,854	6,184	5,971	5,308	5,648
Desember	5,170	6,084	3,918	4,781	4,574	5,132	4,804	5,497

LAMPIRAN 4

Data Rata-Rata Curah Hujan Bulanan di Kabupaten Dhamasraya pada Tahun 2010 sampai Tahun 2017 dalam Satuan mm^3/jam

Bulan	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Januari	191,0	159,0	55,0	60,0	177,0	229,0	475,0	136,0
Februari	187,0	131,0	183,0	134,0	15,0	293,0	253,0	280,0
Maret	290,0	183,0	84,0	124,0	89,0	346,0	495,0	409,0
April	131,0	235,0	165,0	131,0	192,0	418,0	492,0	314,0
Mei	40,0	61,0	106,0	76,0	354,0	206,0	372,0	249,0
Juni	116,0	162,0	30,0	56,0	33,0	132,0	134,0	217,0
Juli	327,0	57,0	102,0	102,0	41,0	370,0	276,0	149,0
Agustus	346,0	103,0	36,0	17,0	154,0	53,0	116,0	195,0
September	166,0	60,0	119,0	98,0	49,0	48,0	147,0	301,0
Oktober	110,0	225,0	98,0	98,0	21,0	22,0	105,0	185,0
November	164,0	235,0	121,0	147,0	249,0	318,0	524,0	349,0
Desember	83,0	365,0	154,0	231,0	121,0	376,0	99,0	285,0

Data Transformasi Lognormal terhadap Data Asli

Bulan	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Januari	5,252	5,068	4,007	4,094	5,176	5,433	6,163	4,912
Februari	5,231	4,875	5,209	4,897	2,708	5,680	5,533	5,634
Maret	5,669	5,209	4,430	4,820	4,488	5,846	6,204	6,013
April	4,875	5,459	5,105	4,875	5,257	6,035	6,198	5,749
Mei	3,688	4,110	4,663	4,330	5,869	5,327	5,918	5,517
Juni	4,753	5,087	3,401	4,025	3,496	4,882	4,897	5,379
Juli	5,789	4,043	4,624	4,624	3,713	3,610	5,620	5,003
Agustus	5,846	4,634	3,583	2,833	5,036	3,970	4,753	5,273
September	5,111	4,094	4,779	4,584	3,891	3,871	4,990	5,707
Oktober	4,700	5,416	4,584	4,584	3,044	3,091	4,653	5,220
November	5,099	5,459	4,795	4,990	5,517	5,762	6,261	5,855
Desember	4,418	5,899	5,036	5,442	4,795	5,929	4,595	5,652

LAMPIRAN 5

Data Rata-Rata Curah Hujan Bulanan di Kabupaten Pesisir Selatan pada Tahun 2010 sampai Tahun 2017 dalam Satuan mm^3/jam

Bulan	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Januari	750,9	265,8	153,0	178,6	195,3	339,0	276,1	182,0
Februari	538,2	340,6	308,3	230,3	73,7	212,9	238,3	162,2
Maret	510,1	494,4	249,9	146,7	212,8	310,2	258,1	129,6
April	297,9	299,9	135,0	147,8	258,7	287,7	222,6	101,2
Mei	229,9	243,0	189,3	128,5	196,4	118,9	165,7	172,0
Juni	263,9	251,5	136,7	119,1	127,8	236,3	116,1	108,9
Juli	275,9	275,0	233,6	122,7	124,0	117,6	147,3	102,7
Agustus	192,7	203,8	308,8	185,7	219,6	214,7	99,1	250,6
September	274,0	277,4	107,0	239,7	321,4	71,1	129,3	195,3
Oktober	277,8	271,3	384,3	384,7	321,7	144,7	265,4	150,3
November	414,1	392,6	345,6	451,7	508,1	341,1	162,9	245,6
Desember	240,2	248,4	361,0	310,1	290,8	281,3	169,8	151,0

Data Transformasi Lognormal terhadap Data Asli

Bulan	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Januari	6,621	5,582	5,030	5,185	5,274	5,826	5,620	5,204
Februari	6,288	5,830	5,731	5,439	4,300	5,360	5,473	5,088
Maret	6,234	6,203	5,521	4,988	5,360	5,737	5,553	4,864
April	5,696	5,703	4,905	4,995	5,555	5,661	5,405	4,617
Mei	5,437	5,493	5,243	4,855	5,280	4,778	5,110	5,147
Juni	5,575	5,527	4,917	4,779	4,850	5,465	4,754	4,690
Juli	5,620	5,616	5,453	4,809	4,820	4,767	4,992	4,631
Agustus	5,261	5,317	5,732	5,224	5,391	5,369	4,596	5,523
September	5,613	5,625	4,672	5,479	5,772	4,264	4,862	5,274
Oktober	5,627	5,603	5,951	5,952	5,773	4,974	5,581	5,012
November	6,026	5,972	5,845	6,113	6,230	5,832	5,093	5,503
Desember	5,481	5,51	5,888	5,736	5,672	5,639	5,134	5,017

LAMPIRAN 6

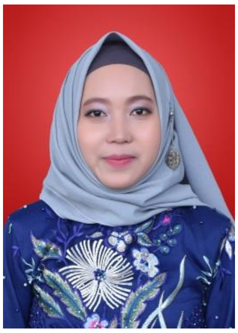
Data Rata-Rata Curah Hujan Bulanan di Kabupaten Padang Pariaman pada Tahun 2010 sampai Tahun 2017 dalam Satuan mm^3/jam

Bulan	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Januari	440,1	347,3	268,2	207,9	329,6	222,0	282,0	397,0
Februari	649,4	288,5	449,1	403,1	122,8	183,0	263,0	315,0
Maret	660,0	302,4	220,0	321,5	212,1	297,0	575,0	345,0
April	605,3	353,6	306,4	327,4	453,9	333,0	506,0	376,0
Mei	377,7	242,2	233,1	329,6	463,7	205,0	500,0	417,0
Juni	300,5	343,2	246,8	215,5	208,9	215,0	294,0	224,0
Juli	407,7	138,0	337,6	177,5	143,5	90,0	245,0	208,0
Agustus	372,6	277,5	492,5	290,6	360,4	168,0	384,0	279,0
September	370,7	453,0	161,0	350,5	254,4	112,0	354,0	439,0
Oktober	340,9	292,2	612,0	402,5	391,4	122,0	356,0	345,0
November	396,0	853,2	519,7	584,0	689,2	487,0	418,0	726,0
Desember	211,4	333,8	492,5	563,2	313,6	331,0	400,0	443,0

Data Transformasi Lognormal terhadap Data Asli

Bulan	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Januari	6,087	5,850	5,591	5,337	5,797	5,402	5,641	5,983
Februari	6,476	5,664	6,107	5,999	4,810	5,209	5,572	5,752
Maret	6,492	5,711	5,393	5,772	5,357	5,693	6,354	5,843
April	6,405	5,868	5,724	5,791	6,117	5,808	6,226	5,929
Mei	5,934	5,489	5,451	5,797	6,139	5,323	6,214	6,033
Juni	5,705	5,838	5,508	5,372	5,341	5,370	5,683	5,411
Juli	6,010	4,927	5,821	5,178	4,966	4,499	5,501	5,337
Agustus	5,920	5,625	6,199	5,671	5,887	5,123	5,950	5,631
September	5,915	6,115	5,081	5,859	5,538	4,718	5,869	6,084
Oktober	5,831	5,677	6,416	5,997	5,969	4,804	5,874	5,843
November	5,981	6,748	6,253	6,369	6,535	6,188	6,035	6,587
Desember	5,353	5,810	6,199	6,333	5,748	5,802	5,991	6,093

RIWAYAT HIDUP



Penulis bernama Putri Trisna Sari, dilahirkan di Payakumbuh, pada tanggal 30 September 1994 dari pasangan Nasrul dan Khainar. Penulis merupakan anak keempat dari lima bersaudara. Penulis menamatkan pendidikannya di SDN 02 Koto Tuo Kec. Harau pada tahun 2008, SMPN 1 Payakumbuh pada tahun 2011 dan SMAN 3 Payakumbuh pada tahun 2014. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas melalui jalur SNMPTN.

Selama menjadi mahasiswa, penulis aktif sebagai anggota Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) FMIPA Unand pada tahun 2015-2019 dalam berbagai kegiatan. Penulis juga menjadi pengurus UKMF KMT Zenerics pada tahun 2016-2018. Pada tahun 2017, penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Nagari Taratak Baru Utara, Kabupaten Sijunjung dalam rangka melaksanakan salah satu mata kuliah wajib. Alhamdulillah berkat usaha, doa, dan dukungan serta izin Allah SWT, penulis dapat menyelesaikan studi di Universitas Andalas untuk meraih gelar Sarjana Sains (S.Si) pada tanggal 16 Juli 2019.