BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam kehidupan nyata, banyak sekali fenomena di alam ini yang dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial. Untuk masalah tertentu, terkadang persamaan diferensial yang dihasilkan sangat sulit sekali ditentukan penyelesaian eksaknya, sehingga pendekatan numerik sangat diperlukan untuk mengatasi masalah ini. Salah satu metode numerik dalam menyelesaikan persamaan diferensial adalah metode beda hingga. Pada metode ini domain suatu fungsi dipartisi atas sejumlah titik-titik grid dan hampiran untuk turunan pada persamaan diferensial diperoleh dari suatu ekspansi deret Taylor. Berdasarkan lokasi titik grid yang digunakan, metode beda hingga dapat dibagi menjadi tiga jenis, yaitu beda maju (*forward difference*), beda mundur (*backward difference*), dan beda pusat (*central difference*) [10].

Pada umumnya, metode beda hingga lebih sering menggunakan titik-titik grid dengan lebar yang seragam. Namun pada kasus persamaan diferensial tertentu, penggunaan lebar grid yang seragam justru menghasilkan solusi yang kurang akurat dibandingkan penggunaan grid dengan lebar tak-seragam [3]. Metode beda hingga dengan lebar grid yang tak-seragam juga berguna untuk mengurangi waktu komputasi sehingga solusi akan lebih cepat diperoleh dibandingkan dengan menggunakan lebar grid yang seragam [12]. Penggunaan grid dengan lebar tak-seragam sangat berperan pada bidang-bidang lainnya. Salah satunya pada bidang keuangan sebagaimana yang telah dikaji dalam [9]. Permasalahan pada bidang keuangan ini berasal dari fakta bahwa menghitung nilai risiko setiap hari akan memakan waktu ketika beberapa harga opsi ditentukan dengan metode beda hingga. Dalam hal ini, grid yang tidak seragam dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan Black-Scholes dengan akurasi yang lebih baik daripada menggunakan grid yang seragam.

Pada metode beda hingga, rumus umum untuk turunan ke-m dengan orde ketelitian sebarang masih berbentuk implisit yang perhitungannya dapat dibangkitkan dengan suatu algoritma rekursif [1]. Artinya untuk memperoleh rumus hampiran untuk turunan ke-m dengan orde ketelitian sebarang, harus diketahui terlebih dahulu rumus untuk turunan ke-$(m-1)$. Hal ini tentu saja sangat menyulitkan perhitungan dan memberatkan komputasi jika orde turunan yang ingin ditentukan semakin tinggi karena perhitungannya melibatkan jumlah titik grid yang sangat banyak. Untuk mengatasi ini, diperlukan suatu bentuk ekplisit rumus beda hingga sehingga hampiran turunan dengan orde yang tinggi dapat ditentukan dengan mudah dan beban komputasi menjadi lebih ringan [7]. Bentuk eksplisit yang dimaksud di sini adalah suatu ekspresi matematika yang tidak melibatkan perhitungan secara rekursif.

Terkait dengan efisiensi perhitungan numerik dari turunan suatu fungsi, pada tahun 1999 Khan dkk [7] menyajikan bentuk eksplisit dari rumus beda hingga dengan lebar grid seragam yang diformulasikan berdasarkan deret Taylor. Kemudian pada tahun 2003, Khan dkk [8] membuktikan bentuk eksplisit rumus beda maju untuk turunan pertama dengan orde ketelitian sebarang. Selanjutnya, penelitian Khan dkk tersebut dilanjutkan oleh Syafwan dkk pada tahun 2019 untuk membuktikan rumus eksplisit pada turunan kedua [4]. Pada kasus yang sama, di tahun 2022 Putra kemudian memperumum bentuk eksplisit untuk orde turunan yang lebih tinggi [6].

Bentuk eksplisit yang dirumuskan dan dibuktikan oleh para peneliti yang disebutkan di atas hanya berlaku untuk lebar grid yang seragam dan sejauh ini belum ada yang mengkaji untuk lebar grid tak-seragam. Oleh karena itu, penelitian pada tesis ini secara khusus akan memformulasikan bentuk eksplisit dari rumus beda maju untuk turunan pertama dengan orde ketelitian sebarang dan lebar grid tak-seragam berdasarkan deret Taylor.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana menentukan bentuk eksplisit rumus beda maju untuk turunan pertama dengan orde ketelitian sebarang dan lebar grid tak-seragam berdasarkan deret Taylor?

2. Bagaimana implementasi metode beda hingga pada suatu kasus persamaan diferensial orde satu yang diperoleh dengan menggunakan lebar grid tak-seragam dan lebar grid seragam, serta perbandingan hasil akurasi antara keduanya?

1.3 Pembatasan Masalah

Pembahasan dalam penelitian ini dibatasi pada fungsi satu variabel yang memenuhi kondisi Teorema Taylor. Pada kasus contoh implementasi, pemilihan grid hanya menggunakan distribusi titik grid yang telah diberikan dalam [5].

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menentukan bentuk eksplisit rumus beda maju untuk turunan pertama dengan orde ketelitian sebarang dan lebar grid tak-seragam berdasarkan deret Taylor.
2. Menganalisis perbandingan hasil akurasi yang diperoleh dari contoh implementasi metode beda hingga pada suatu persamaan diferensial dengan menggunakan lebar grid tak-seragam dan lebar grid seragam.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan pada tesis ini terdiri atas empat bab. Bab I memuat latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan. Kemudian pada bab II disajikan definisi, teorema, serta notasi-notasi yang terkait dalam penelitian. Selanjutnya pada bab III dijelaskan bentuk eksplisit rumus beda maju untuk turunan pertama dengan lebar grid tak-seragam. Terakhir pada bab IV diberikan kesimpulan dari hasil yang diperoleh serta saran untuk penelitian berikutnya.