BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisis fungsional adalah cabang matematika abstrak yang berasal dari analisis klasik. Analisis fungsional mempelajari tentang ruang yang disertai operator pada ruang tersebut. Salah satu contohnya yaitu, himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan fungsi jarak yang memenuhi sifat non-negatif, simetri, dan ketaksamaan segitiga. Himpunan yang dilengkapi dengan fungsi tersebut dinamakan sebagai ruang metrik [5].

Konsep ruang metrik memiliki peran penting dalam bidang matematika analisis. Hal ini dikarenakan konsep ruang metrik banyak digunakan dalam pembahasan konsep-konsep analisis yang lain dan juga digunakan pada bidang aplikasinya. Misalnya digunakan untuk menentukan kekonvergenan suatu barisan bilangan riil atau barisan bilangan kompleks.

Salah satu teorema yang memanfaatkan konsep kekonvergenan pada ruang metrik adalah teorema pemetaan kontraktif atau teorema kontraksi Banach. Teorema pemetaan kontraktif digunakan untuk menjamin keberadaan dan ketunggalan titik tetap. Untuk sebarang himpunan tak kosong X, titik $x \in X$ disebut titik tetap dari suatu pemetaan T jika $Tx = x$ [5]. Salah satu aplikasi teorema pemetaan kontraktif yaitu menentukan solusi dalam persamaan diferensial biasa yang dilengkapi dengan masalah nilai awal.

Teorema pemetaan kontraktif pertama kali diperkenalkan oleh Stefan Banach [2] pada tahun 1922. Dalam penelitiannya, Banach telah membuktikan keberadaan dan ketunggalan titik tetap pada ruang metrik lengkap. Seiring perkembangan zaman, banyak peneliti lain yang mengembangkan teorema pemetaan kontraktif dengan memodifikasi ketaksamaan pada teorema kontraksi Banach atau menggunakan ruang yang berbeda. Contohnya pada ruang bernorma, ruang Banach dan beberapa perluasan dari ruang metrik itu sendiri. Salah satunya pada tahun 2012, Dariusz Wardowski [8] mengkaji tentang keberadaan dan ketunggalan titik tetap pada ruang metrik lengkap dengan menggunakan ketaksamaan yang berbeda dari teorema kontraksi Banach. Dariusz mengalikan kedua sisi ketaksamaan dengan suatu fungsi monoton naik dan mengurangkan jarak antar titiknya dengan suatu konstanta positif. Kemudian pada tahun 2013, Amini-Harandi dan Petrusel [1] mengkaji teorema titik tetap pada ruang metrik lengkap juga. Namun, ketaksamaan yang digunakan kedua sisinya dikalikan dengan dua fungsi yang berbeda. Amini juga menambahkan syarat pada fungsi yang digunakannya, yaitu harus fungsi naik dan kontinu. Kemudian, pada tahun 2014 masih pada ruang metrik lengkap Jleli dan Samet [4] membuktikan keberadaan dan ketunggalan titik tetap dengan menggunakan ketaksamaan yang hasil perkalian fungsi dengan jarak titiknya akan dipangkatkan dengan konstanta positif yang kurang dari satu.

Selanjutnya pada tahun 2020, Petko D. Proinov [7] meneliti mengenai keberadaan dan ketunggalan titik tetap dengan menggabungkan beberapa kondisi dari penelitian-penelitian sebelumnya. Petko menggunakan persamaan yang sama dengan penelitian Amini-Harandi sekaligus memperluas batas kedua fungsi yang digunakan, sama seperti penelitian yang telah dilakukan oleh Dariusz. Serta kedua fungsinya juga tidak diharuskan menggunakan fungsi kontinu ataupun semikontinu sama seperti syarat yang digunakan oleh Jleli dan Samet. Oleh karena itu, peneliti tertarik untuk membahas kembali titik tetap untuk teorema pemetaan kontraktif $-(\psi, \phi)$ pada ruang metrik lengkap dengan merujuk artikel dari Petko D. Proinov. Masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini, dibatasi pada penggunaan konsep kekonvergenan barisan dalam menganalisis keberadaan dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraktif $-(\psi, \phi)$ pada ruang metrik lengkap.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, permasalahan yang akan dikaji pada tugas akhir ini adalah bagaimana keberadaan dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraktif $-(\psi, \phi)$ pada ruang metrik lengkap.

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi pada penggunaan konsep kekonvergenan barisan dalam menganalisis keberadaan dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraktif $-(\psi, \phi)$ pada ruang metrik lengkap.

1.4 Tujuan Penulisan

Berdasarkan permasalahan di atas, maka tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah menganalisis keberadaan dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraktif $-(\psi, \phi)$ pada ruang metrik lengkap.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini terdiri atas empat bab. Bab I Pendahuluan memuat latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan. Bab II Landasan Teori berisi materi fungsi, limit fungsi, barisan, ruang metrik dan teorema pemetaan kontraktif. Bab III Pembahasan memuat hasil penelitian yaitu teorema pemetaan kontraktif $-(\psi, \phi)$ pada ruang metrik lengkap. Bab IV Penutup berisi kesimpulan dan saran.