

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Persamaan Schrödinger diskrit nonlinier (SDNL) merupakan salah satu persamaan beda-diferensial (*difference-differential*) yang sering dijumpai pada berbagai aplikasi. Beberapa diantaranya adalah dinamika sistem osilator tak harmonik terikat (*coupled*), perambatan berkas optik pada pandu gelombang nonlinier terikat, dan dinamika kondensasi Bose-Einstein [*Bose-Einstein Condensation* (BEC)]. BEC sendiri merupakan suatu wujud zat yang didinginkan sampai suhu mendekati $0^{\circ}K$ yang diprediksi eksistensinya secara teori oleh S.N Bose dan A. Einstein pada tahun 1925 [1]. Berselang sekitar 70 tahun kemudian, Wolfgang Ketterle, Eric Cornell dan Carl Wiemann berhasil melakukan eksperimen pertama yang membuktikan keberadaan BEC. Keberhasilan tersebut membuat mereka dianugrahi hadiah Nobel di bidang fisika pada tahun 2001 [2].

Bentuk umum dari model SDNL diberikan oleh [3]

$$i\dot{\psi}_n = -\varepsilon(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) + F(\psi_{n+1}, \psi_n, \psi_{n-1}), \quad (1.1.1)$$

dimana $\psi_n \equiv \psi_n(t) \in \mathbb{C}$ adalah fungsi terhadap waktu $t \in \mathbb{R}^+$ dan site $n \in \mathbb{Z}$, $\dot{\psi}_n$ menyatakan turunan fungsi ψ_n terhadap t , ε merupakan konstanta pengikat (*coupling constant*) dan F menyatakan suku nonlinier.

Pada persamaan (1.1.1), suku nonlinier F mempunyai beberapa bentuk, yaitu [3]:

1. Kenonlinieran bertipe kubik:

$$F_{cub} = -|\psi_n|^2\psi_n \quad (1.1.2)$$

2. Kenonlinieran bertipe quintik:

$$F_{quin} = |\psi_n|^4\psi_n. \quad (1.1.3)$$

3. Kenonlinieran bertipe Ablowitz-Ladik (AL):

$$F_{Al} = \frac{1}{2}|\psi_n|^2(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}). \quad (1.1.4)$$

Persamaan SDNL dengan suku nonlinear kubik (1.1.2) dan quintik (1.1.3) dikenal sebagai persamaan yang *non-integrable* (tidak dapat diekspresikan solusi solitonnya secara eksak) [2]. Pada tahun 1975-1976, Ablowitz dan Ladik [4] memperkenalkan persamaan SDNL dengan suku nonlinier (1.1.4) dan menunjukkan bahwa persamaan tersebut *integrable*, dimana solusi soliton eksak diberikan oleh [7]:

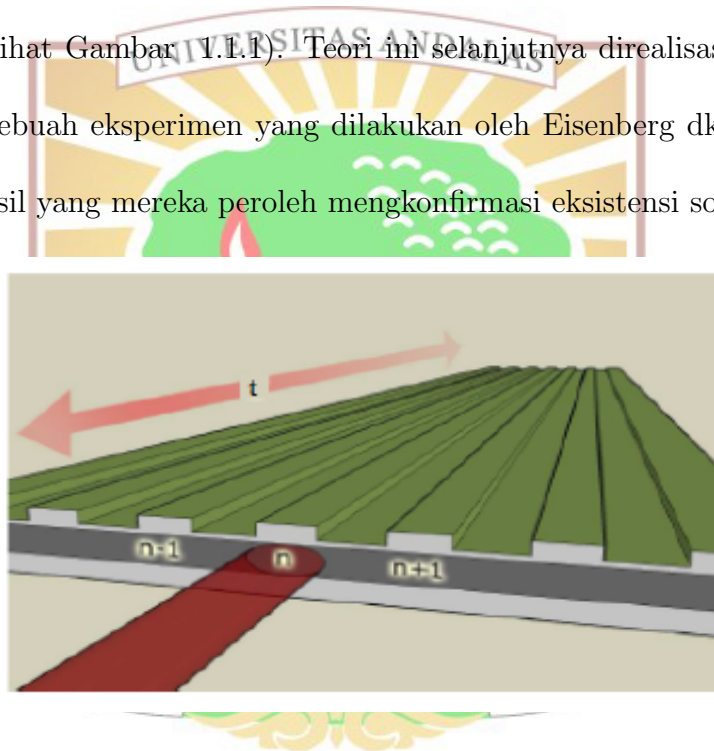
$$\psi_n(t) = \sinh(\chi)\text{sech}[\chi(n - ct)]e^{i(k+\omega t+\alpha)}, \quad (1.1.5)$$

dimana χ, k, α adalah parameter, $c = 2 \sinh(\chi) \sin(k)/\chi$ dan $\omega = 2(\cosh(\chi) \cos(k) - 1)$.

Hal yang paling menarik pada persamaan SDNL (1.1.2) adalah eksistensi solusi *soliton* yang dimilikinya. Dalam konteks aplikasi pada teknologi informasi dan komunikasi berbasis optik, soliton dapat direkayasa sebagai pengantar informasi yang dapat merambat pada media dengan jarak tempuh yang

sangat jauh tanpa ada gangguan yang berarti. Fenomena ini sangat penting dalam pengembangan teknologi komunikasi di masa depan.

Dalam konteks aplikasi di bidang optik, perambatan soliton pada pandu gelombang nonlinier terikat dimodelkan pertama kali oleh Christodoulides dan Joseph pada 1988 dan menghasilkan persamaan SDNL bertipe kubik [21]. Dalam hal ini, indeks n pada persamaan SDNL menyatakan posisi pandu gelombang dan $|\psi_n(t)|^2$ merepresentasikan intensitas medan optik di sepanjang pandu gelombang ke- n (lihat Gambar 1.1.1). Teori ini selanjutnya direalisasikan pertama kali dalam sebuah eksperimen yang dilakukan oleh Eisenberg dkk pada tahun 1998 dan hasil yang mereka peroleh mengkonfirmasi eksistensi soliton [11].



Gambar 1.1.1: Ilustrasi pandu gelombang (sumber: Eisenberg dkk [11])

Untuk menentukan hampiran solusi dari suatu persamaan beda-diferensial yang non-integrable, salah satu pendekatan analitik yang digunakan adalah metode aproksimasi variasional (selanjutnya disingkat AV). Metode ini diformulasikan berdasarkan prinsip aksi terkecil *least action*, atau dikenal juga dengan prinsip Hamiltonian, yang menyatakan bahwa persamaan gerak suatu sistem

ditentukan oleh titik-titik kritis dari aksi *action* sehingga kemudian diperoleh persamaan Euler-Lagrange untuk sistem tersebut [4]. Keberhasilan metode ini sangat bergantung pada fungsi ansatz (penduga) yang digunakan dalam menghampiri suatu solusi yang diinginkan.

Dalam hal solusi soliton pada persamaan SDNL (1.1.2), metode AV telah banyak digunakan oleh para peneliti. Sebagai contoh, Aceves dkk [8] menerapkan metode AV untuk mengaproksimasi soliton *onsite*, yaitu solusi soliton yang berpusat pada satu *site*. Kaup [10] menerapkan metode AV untuk menghampiri solusi soliton *intersite*, yaitu soliton yang memiliki berpusat diantara dua *site* bersebelahan. Fungsi ansatz yang digunakan dalam [10] dan [8] tersebut berlaku untuk kasus $\varepsilon \approx 0$ atau dikenal dengan istilah limit *anti-continuum*.

Hasil-hasil AV yang diperoleh selama ini dikonfirmasi validasinya melalui perbandingan numerik untuk beberapa nilai parameter tertentu. Untuk menjustifikasi validasi AV secara umum, Chong dkk [12] telah mengembangkan suatu teorema yang dapat dijadikan sebagai ukuran validasi hasil AV secara tepat. Chong dkk mengkonfirmasi bahwa fungsi penduga untuk soliton dengan jumlah parameter yang lebih banyak memberikan aproksimasi yang lebih akurat.

Pada tesis ini, kajian terhadap persamaan SDNL (1.1.2) diperluas dengan meninjau efek penguat yang berasal dari internal sistem (disebut *parametric driving*). Metode AV untuk menentukan hampiran soliton onsite dan intersite pada persamaan SDNL dengan *parametric driving* telah dikaji berturut-turut oleh Syafwan [13] dan Alfiany [14]. Keduanya memperoleh hasil aproksi-

masi yang sangat baik ketika dibandingkan dengan hasil numerik. Baru-baru ini, metode AV juga digunakan oleh Syafwan dkk [15] untuk menentukan hampiran soliton *twisted* pada persamaan SDNL dengan *parametric driving*, namun hasilnya masih belum begitu baik ketika konstanta pengikat $\varepsilon \rightarrow 0$.

1.2 Perumusan Masalah

Dalam penelitian ini, kajian pada [15] tentang aproksimasi variasional untuk soliton *twisted* pada persamaan SDNL dengan *parametric driving* akan dilanjutkan dengan menggunakan fungsi ansatz baru yang diharapkan dapat menghasilkan aproksimasi yang lebih baik. Selanjutnya akan diperiksa validasi hampiran soliton yang diperoleh dengan merujuk pada referensi [12].

1.3 Pembatasan Masalah

Masalah pada penelitian ini dibatasi untuk soliton stasioner yang bernilai riil pada kasus limit *anti-continuum*.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menentukan hampiran soliton *twisted* pada persamaan SDNL dengan *parametric driving* dengan menggunakan metode AV
2. Membandingkan hasil-hasil yang diperoleh secara analitik (AV) dengan hasil-hasil numerik.

3. Memeriksa validasi solusi yang diperoleh dari metode AV.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini bermanfaat dalam memperkaya kajian teoritis tentang soliton pada persamaan SDNL dengan *parametric driving*.

1.6 Sistematika Penulisan

Tulisan ini dibagi atas empat bab. Pada Bab I dibahas latar belakang penelitian, rumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian dan sistematika penulisan. Konsep dasar beserta materi penunjang sebagai landasan teori diberikan pada Bab II. Selanjutnya pada Bab III dibahas penerapan metode AV dalam menentukan hampiran solusi soliton *twisted* beserta perhitungan numerik dan validasinya. Hasil-hasil yang diperoleh kemudian disimpulkan pada Bab IV.

