BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial adalah persamaan yang mengandung turunan dengan menyatakan hubungan antara fungsi dan kecepatan terjadinya sesuatu [1]. Persamaan diferensial yang melibatkan dua atau lebih varibel bebas dinamakan persamaan diferensial parsial. Salah satu contoh dari persamaan diferensial parsial adalah persamaan difusi. Persamaan difusi mendeskripsikan berpindahnya suatu zat dalam pelarut dari bagian berkonsentrasi tinggi ke bagian yang berkonsentrasi rendah. Di samping itu, persamaan difusi juga memodelkan perambatan panas melalui konduksi dalam suatu bahan padat [2].

Untuk menentukan solusi secara analitik dari persamaan diferensial parsial, termasuk persamaan difusi, dapat menggunakan beberapa metode, diantaranya adalah metode transformasi Laplace, metode pemisahan variabel, dan metode Galerkin. Namun tidak semua persamaan diferensial parsial dapat diselesaikan secara analitik, sehingga diperlukan penyelesaian secara numerik. Dalam hal ini, metode numerik pada persamaan diferensial parsial menghasilkan hampiran atau pendekatan turunan dari suatu fungsi.

Salah satu metode populer yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial secara numerik adalah metode beda hingga. Metode beda hingga memiliki beberapa skema, seperti beda maju, beda mundur dan beda pusat. Dari ketiga skema tersebut, dapat dilakukan modifikasi skema metode beda hingga, seperti skema Backward Time Central Space (*BTCS*), Forward Time Central Space (*FTCS*), *Crank-Nicholson*, dan lain-lain [3]. Metode BTCS merupakan skema beda hingga yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial secara numerik dengan menerapkan beda mundur pada suku turunan terhadap waktu dan beda pusat pada suku terhadap posisi (spasial). Metode FTCS merupakan skema beda hingga yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial secara numerik dengan menerapkan beda maju pada suku turunan terhadap waktu dan beda pusat pada suku turunan terhadap posisi (spasial). Metode *Crank-Nicholson* merupakan skema beda hingga yang mengkombinasikan BTCS dan FTCS.

Pada metode beda hingga, banyaknya suku yang menghampiri suatu turunan disebut orde suku pemotongan atau juga dikenal sebagai orde ketelitian. Semakin banyak suku yang digunakan, maka semakin baik nilai hampiran turunan yang didapatkan. Hampiran turunan dengan orde ketelitian ke-N dapat diperoleh dengan menyelesaikan N buah persamaan yang didapat dari N buah ekspansi deret Taylor yang masing-masing dipotong sampai $N+1$ suku. Jika orde ketelitian diubah, maka koefisien semua suku harus dihitung kembali dengan menyelesaikan sistem persamaan baru. Semakin tinggi orde ketelitian yang ingin ditentukan, maka perhitungan yang dilakukan semakin besar.

Secara umum rumus beda hingga untuk turunan dengan orde ketelitian tertentu dapat dibangkitkan dengan algoritma rekursif. Salah satu algoritma rekursif tersebut telah dikembangkan oleh Fornberg dan diperoleh tabel yang berisi koefisien-koefisien rumus beda hingga untuk beberapa tingkatan turunan fungsi dengan beberapa orde ketelitian [4].

Dalam impelementasinya, algoritma rekursif untuk menghitung hampiran turunan fungsi dengan tingkatan turunan dan orde ketelitian yang semakin tinggi membutuhkan memori komputasi yang semakin besar karena melibatkan jumlah titik-titik partisi yang semakin banyak. Untuk mengatasi masalah ini, diperlukan suatu rumus ekplisit beda hingga untuk menentukan hampiran turunan dari suatu fungsi. Dengan bentuk eksplisit ini, hampiran turunan dengan orde ketelitian yang sangat tinggi dapat ditentukan dengan cukup mudah. Hal ini tentu saja akan memberikan hasil yang lebih akurat dan efisien dalam menyelesaikan suatu persamaan diferensial secara numerik. Adapun bentuk eksplisit yang dimaksud di sini adalah suatu ekpresi matematika yang tidak melibatkan perhitungan secara rekursif [4].

Beberapa penelitian telah mengimplementasikan metode beda hingga diantaranya penyelesaian persamaan adveksi-difusi orde 2 dengan metode beda hingga pusat [10] dan penggunaan beda hingga pusat untuk menentukan kesetimbangan fluida yang dimodelkan persamaan difusi orde 2 [5]. Selain itu, persamaan difusi orde 2 juga diselesaikan oleh [9] dengan menggunakan metode beda hingga pada penerapan masalah banjir.

Dalam ketiga penelitian di atas, rumus beda pusat diterapkan pada suku turunan terhadap posisi dengan ketelitian orde 2. Pada tugas akhir ini, metode beda hingga diterapkan pada persamaan difusi dengan memperumum rumus beda pusat pada suku turunan terhadap posisi dengan orde ketelitian ke-N. Rumus beda pusat dengan orde ketelitian sebarang tersebut diambil dari bentuk eksplisit beda pusat yang diformulasi dalam [13].

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka permasalahan yang akan dikaji pada penelitian tugas akhir ini adalah:

1. bagaimana mengkonstruksi skema beda hingga untuk persamaan difusi dengan orde ketelitian sebarang?
2. bagaimana hasil implementasi skema beda hingga pada persamaan difusi?
3. bagaimana hasil simulasi numerik skema beda hingga tersebut dengan menggunakan pemrograman Matlab dan interpretasi hasil simulasi yang diperoleh?

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi pada kasus metode beda hingga jenis FTCS (*Forward Time Central Space*).

1.4 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan penulisan ini adalah untuk mengkonstruksi serta menganalisis skema metode beda hingga pada persamaan difusi dengan orde ketelitian sebarang. Selain itu, tujuan lainnya adalah untuk mengimplementasikan metode beda hingga pada pemrograman Matlab serta dapat menginterpretasikan hasil simulasi yang diperoleh.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan tugas akhir ini terdiri dari empat bab. Bab I memuat latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, batasan masalah, dan sistematika penulisan. Bab II memuat materi dasar dan materi pendukung yang akan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam tugas akhir ini. Selanjutnya, Bab III menjelaskan proses penyelesaian suatu persamaan difusi dengan menggunakan metode beda hingga skema FTCS dengan orde ketelitian sebarang. Terakhir pada Bab IV disajikan kesimpulan dan saran.