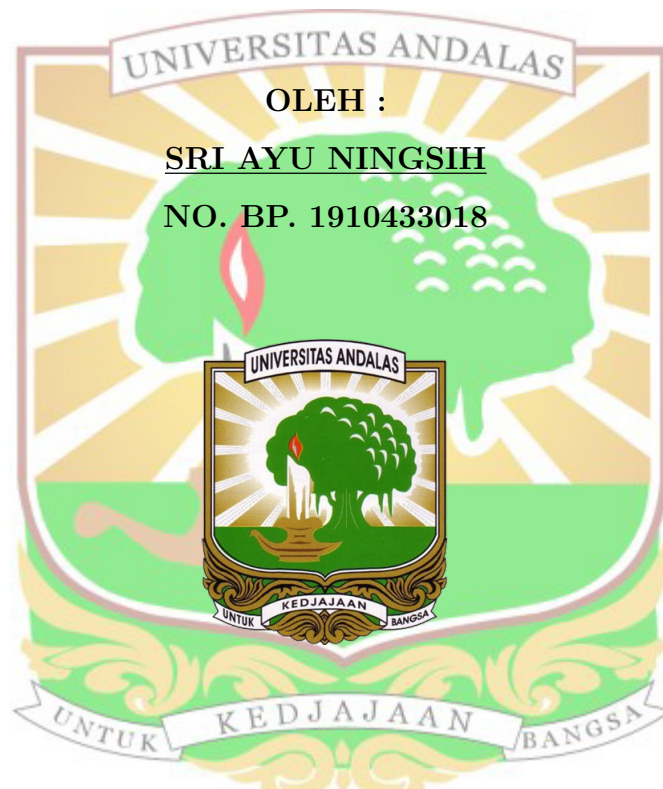


**KESTABILAN MODEL PENULARAN PENYAKIT
MALARIA DI INDONESIA**

**SKRIPSI SARJANA
MATEMATIKA DAN SAINS DATA**



DOSEN PEMBIMBING:

Dr. SUSILA BAHRI

NARWEN, M.Si

**DEPARTEMEN MATEMATIKA DAN SAINS DATA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS**

PADANG

2023

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa

Nama : Sri Ayu Ningsih
No. Buku Pokok : 1910433018
Departemen : Matematika dan Sains Data
Bidang : Matematika Terapan
Judul Skripsi : **Kestabilan Model Penularan Penyakit Malaria di
Indonesia**

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal **23 Agustus 2023** berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing,

1.



Dr. Susia Bahri
NIP. 196803031993022001

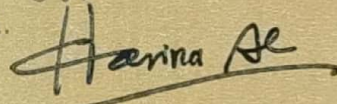
2.



Narwen, M.Si
NIP. 196704101997021001

Penguji,

1.



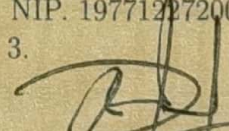
Dr. Noverina Alfiany
NIP. 198611062020122002

2.



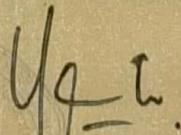
Dr. Dodi Devianto
NIP. 197712272000121002

3.

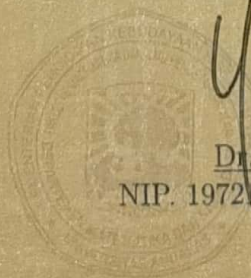


Dr. Shelvi Ekariani
NIP. 198806192015042001

Mengetahui,
Ketua Departemen Matematika dan Sains Data FMIPA UNAND



Dr. Yanita
NIP. 197210302003122001



HALAMAN PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

"Tidak ada kesuksesan melainkan dengan pertolongan Allah."

(QS. Hud : 88)

"Barang siapa yang menempuh suatu jalan untuk menuntut ilmu, Allah akan memudahkan baginya jalan ke Surga."

(H.R. Imam Muslim)

Alhamdulillah rabbi'l'alamin, segala puji syukur kehadiran **Allah Subhanahu Wa Ta'ala** atas segala nikmat-Nya penulis dapat memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si). *Allahumma shalli'ala Muhammad*, semoga Allah menyampaikan kepada Nabi Muhammad *Shallallahu Alaihi Wa Sallam*, dan kita berada di antara golongan Beliau di akhirat kelak.

Tulisan ini penulis persembahkan untuk kedua orang tua penulis, Ayahanda tercinta **Arlen** dan Ibunda tersayang **Enim, S.Pd** yang telah menjadi alasan perjuangan penulis menyelesaikan perkuliahan ini.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, dorongan, kerjasama maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah membantu penulisan skripsi ini, terutama kepada

Keluarga Tercinta

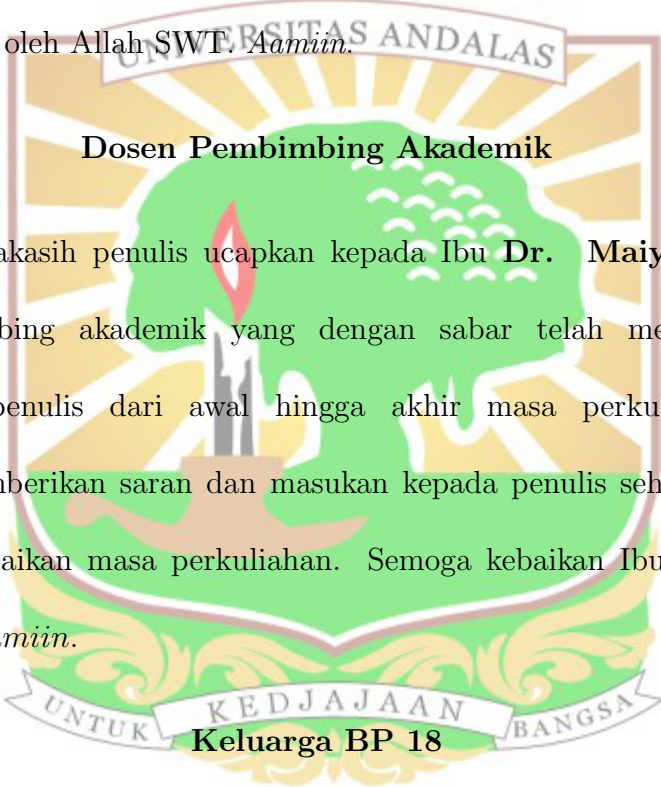
Skripsi ini adalah bentuk persembahan kecil dari penulis untuk keluarga tercinta sebagai bentuk ucapan terimakasih kepada Ayahanda tercinta **Arlen** dan Ibunda tersayang **Enim, S.Pd** yang selalu mendukung dan membimbing perjalanan ini dengan penuh pengorbanan, kasih sayang, ketulusan, dan do'a-do'a terbaik yang diberikan kepada penulis. Terimakasih kepada Kakak tersayang **Fina Febrianti, A.md.Kes** yang telah memberikan doa, dukungan, dan semangat dalam segala hal. Terimakasih juga kepada Uda tersayang **Ari Gusandi** yang telah memberikan semangat, nasihat, dan pengorbanan kepada penulis. Kemudian terimakasih kepada seluruh keluarga besar penulis yang telah memberikan do'a dan dukungan sampai penulis bisa meraih gelar sarjana.

Dosen Pembimbing

Terimakasih kepada Ibu **Dr. Susila Bahri** dan Bapak **Narwen, M.Si** selaku dosen pembimbing yang selalu memberikan motivasi, saran, dan semua kebaikannya selama ini, yang telah membimbing penulis dengan sabar dalam pengerjaan skripsi ini hingga dapat menyelesaikan ujian sarjana. Penulis minta maaf apabila selama pengerjaan skripsi ini telah banyak menyusahkan Ibu dan Bapak. Semoga kebaikan Ibu dan Bapak dibalas oleh Allah SWT. *Aamiin.*

Dosen Penguji

Terimakasih kepada Ibu **Dr. Noverina Alfiany**, Bapak **Dr. Dodi Devianto** dan Ibu **Dr. Shelvi Ekariani** selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik, saran, serta masukan sehingga skripsi ini menjadi lebih baik. Penulis memohon maaf apabila selama perbaikan skripsi ini menyusahkan Bapak dan Ibu. Semoga semua kebaikan yang Bapak dan Ibu berikan dibalas oleh Allah SWT. *Aamin.*



Dosen Pembimbing Akademik

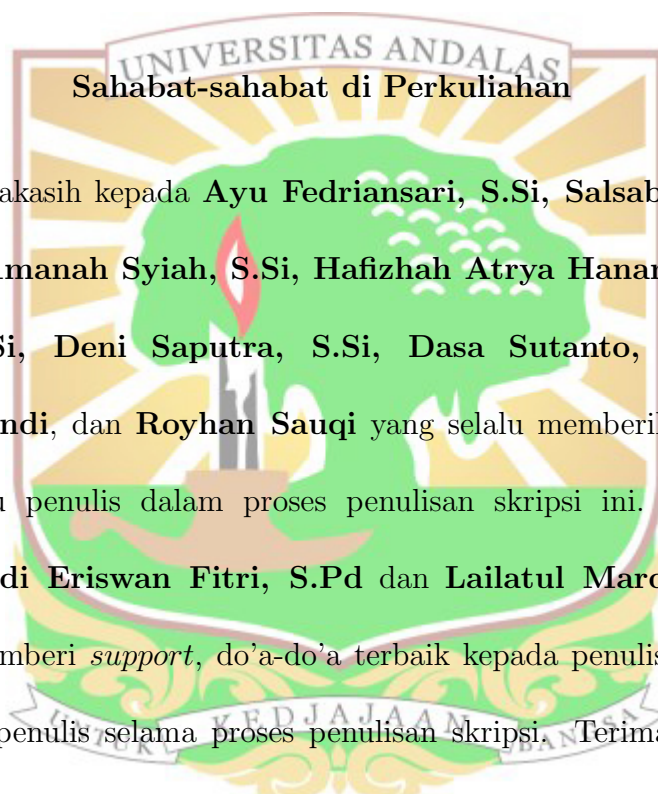
Terimakasih penulis ucapkan kepada Ibu **Dr. Maiyastri**, selaku dosen pembimbing akademik yang dengan sabar telah membantu dan membimbing penulis dari awal hingga akhir masa perkuliahan, yang senantiasa memberikan saran dan masukan kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan masa perkuliahan. Semoga kebaikan Ibu dibalas oleh Allah SWT. *Aamin.*

Keluarga BP 18

Terimakasih kepada **Alwi, S.Si** dan **Aliffia Dewi Putri, S.Si**, saudara bp penulis yang telah menemani dan membantu penulis baik selama perkuliahan maupun di luar perkuliahan. Terimakasih juga kepada Uda Uni dan Adik bp penulis yaitu, **Uda Ridha, Uda Iqbal, Uni Nanda, Uni Dedew, Uni Nurul, Mifta, Yuli**, dan **Dewi**, yang telah menjadi keluarga selama penulis berada di bangku perkuliahan ini. Maaf jika selama ini sering merepotkan, semoga silaturahmi kita selalu terjaga sampai kapanpun.

INFINITY'19 dan HIMATIKA FMIPA UNAND

Terimakasih kepada **INFINITY'19** dan **HIMATIKA FMIPA UNAND** yang telah menemani penulis pada masa perkuliahan. Terimakasih sudah mendukung dan mendoakan serta menyemangati penulis agar dapat menyelesaikan skripsi ini tepat waktu. Semoga kita dipertemukan kembali di lain waktu.



Terimakasih kepada **Ayu Fedriansari, S.Si, Salsabilla Rizkika, S.Si, Nisha Amanah Syiah, S.Si, Hafizhah Atrya Hanan, S.Si, Ferri Hardian, S.Si, Deni Saputra, S.Si, Dasa Sutanto, S.Si, Hanif Rayhan Riyandi, dan Royhan Sauqi** yang selalu memberikan dukungan dan membantu penulis dalam proses penulisan skripsi ini. Terimakasih kepada **Trinindi Eriswan Fitri, S.Pd dan Lailatul Mardatillah, S.T** yang selalu memberi *support*, do'a-do'a terbaik kepada penulis dan menjadi tempat cerita penulis selama proses penulisan skripsi. Terimakasih banyak untuk kalian semua atas waktu, do'a, dukungan, dan motivasinya selama ini.

Special Thanks

Terimakasih kepada **Meutia Ivana Hendri, S.Si**, teman dekat sekaligus teman terbaik penulis. Terimakasih atas waktu, tenaga, do'a, dukungan serta motivasi yang diberikan kepada penulis hingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Terimakasih telah menjadi salah satu *best support system* penulis. Terimakasih atas semua hal-hal baik yang selalu diberikan

kepada penulis selama ini. Penulis juga berterima kasih karena bersedia mendengarkan keluh kesah penulis selama penulisan skripsi ini. Penulis berharap semoga apapun yang saudara kerjakan dipermudah dan diberi kelancaran oleh Allah SWT. *Aamiin.*

Myself

Last but not least. For me Sri Ayu Ningsih, thanks you for being so strong. I wanna thank me. I wanna thank me for believing in me. I wanna thank me for doing all this hard work. I wanna thank me for having no days off. I wanna thank me for never quitting. I wanna thank me for tryna do more right than wrong. I wanna thank me for just being me at all times.

”Jangan biarkan kesulitanmu menguasaiimu, percayalah bahwa ini malam yang gelap dan hari yang cerah akan datang. Karena sesungguhnya dengan kesulitan akan ada kemudahan.”

(QS. Al-Insyirah : 5)

”Tidak ada kesuksesan tanpa kerja keras. Tidak ada keberhasilan tanpa kebersamaan. Tidak ada kemudahan tanpa do’a.”

(Ridwan Kamil)

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbill'alamin, segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan nikmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul ***Kestabilan Model Penularan Penyakit Malaria di Indonesia*** sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Departemen Matematika dan Sains Data Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas. Shalawat beserta Salam semoga selalu tercurahkan kepada Baginda Rasulullah SAW yang telah membawa iman dan ilmu pengetahuan kepada umat manusia.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, dorongan, kerjasama maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah membantu penulisan skripsi ini, terutama kepada:

1. Keluarga tercinta, Ayahanda **Arlen** dan Ibunda **Enim, S.Pd**, yang selalu memberi do'a, dukungan, semangat, kasih sayang, dan pengorbanan selama penulis menempuh pendidikan. Serta Kakak tersayang **Fina Febrianti, A.md. Kes** yang telah memberi semangat dalam hal apapun.
2. Ibu **Dr. Susila Bahri** dan Bapak **Narwen, M.Si**, selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan ilmu, motivasi, dan nasehat dalam menyelesaikan skripsi ini.

3. Ibu **Dr. Noverina Alfiany**, Bapak **Dr. Dodi Devianto** dan Ibu **Dr. Shelvi Ekariani**, selaku dosen penguji yang telah memberikan kritikan dan saran guna menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.
4. Ibu **Dr. Maiyastri**, selaku dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan motivasi, ilmu, serta membantu penulis dari awal hingga akhir masa perkuliahan.
5. Ibu **Dr. Yanita** selaku Ketua Departemen Matematika dan Sains Data, beserta seluruh **Bapak Ibu Dosen beserta Staf Departemen Matematika dan Sains Data** yang telah memberikan ilmu, nasehat, dan pengajaran dengan penuh kesabaran dan pengorbanan.
6. Semua pihak yang telah membantu selama penulisan skripsi ini.

Penulis sangat menyadari bahwa dalam skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis mengharapkan kritik dan saran agar kelak diperoleh hasil yang lebih baik. Penulis berharap agar skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang memerlukannya. Aamiin.

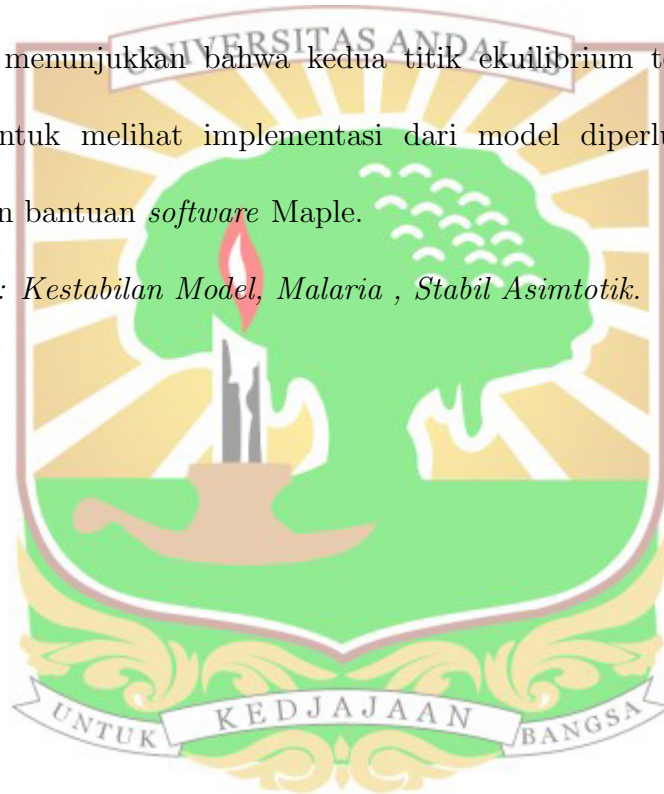
Padang, September 2023

Sri Ayu Ningsih, S.Si

ABSTRAK

Dalam artikel ini dikaji kestabilan model penularan penyakit malaria. Pada model ini populasi dibagi menjadi 3 subpopulasi, *Susceptible (S)*, *Infected (I)*, dan *Recovered (R)*. Model ini memiliki dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit. Selanjutnya dilakukan analisis kestabilan pada kedua titik ekuilibrium tersebut yang menunjukkan bahwa kedua titik ekuilibrium tersebut stabil asimtotik. Untuk melihat implementasi dari model diperlukan simulasi numerik dengan bantuan *software* Maple.

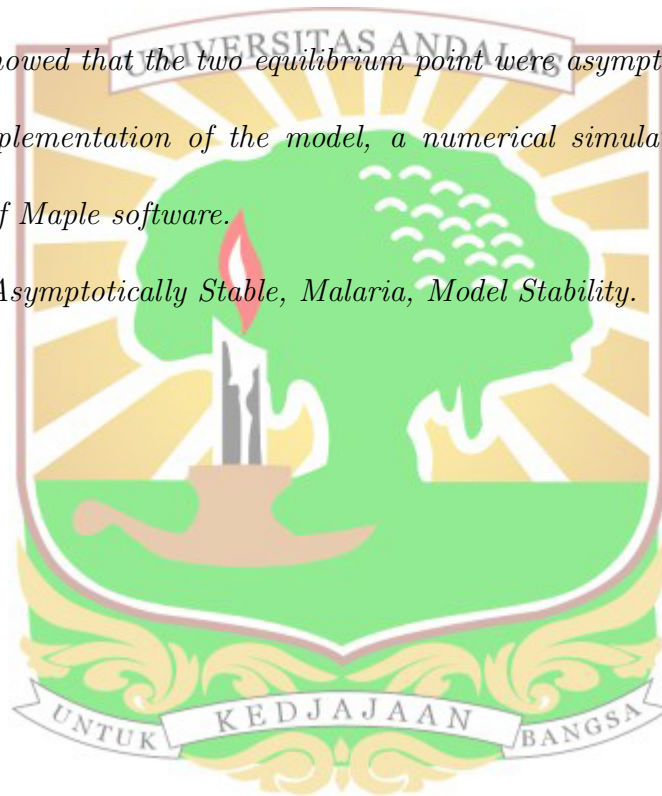
Kata Kunci : *Kestabilan Model, Malaria , Stabil Asimtotik.*



ABSTRACT

This article examines the stability of the malaria transmission model. In this model the population is divided into 3 subpopulations, Susceptible (S), Infected (I), and Recovery (R). This model has two equilibrium points, namely the disease-free equilibrium point and the disease-endemic equilibrium point. Furthermore, a stability analysis was carried out at the two equilibrium points which showed that the two equilibrium point were asymptotically stable. To see the implementation of the model, a numerical simulation is needed with the help of Maple software.

Keywords : *Asymptotically Stable, Malaria, Model Stability.*



DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	vii
ABSTRAK	ix
ABSTRACT	x
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR GAMBAR	xiv
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	3
1.3. Batasan Masalah	3
1.4. Tujuan Penulisan	3
1.5. Sistematika Penulisan	4
BAB II LANDASAN TEORI	5
2.1. Teori Dasar Matriks	5
2.2. Polinomial	6
2.3. Persamaan Diferensial	7
2.4. Model Dasar Penyebaran Penyakit	9
2.5. Kestabilan Sistem	11

2.6. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)	13
BAB III PEMBAHASAN	15
3.1. Model Modifikasi <i>SIR</i> Penyakit Malaria	15
3.2. Analisis Kestabilan Sistem	17
3.2.1. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit	17
3.2.2. Titik Ekuilibrium Endemik	18
3.2.3. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)	19
3.3. Kestabilan Titik Ekuilibrium	20
3.3.1. Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit	21
3.3.2. Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik	23
3.4. Simulasi Numerik	25
3.4.1. Data Kasus Penyakit Malaria di Indonesia	26
3.4.2. Simulasi Model <i>SIR</i> Penularan Penyakit Malaria di	
Indonesia	29
BAB IV PENUTUP	34
4.1. Kesimpulan	34
DAFTAR PUSTAKA	36
RIWAYAT HIDUP	39

DAFTAR TABEL

3.1.1. Parameter Model Modifikasi <i>STB</i>	16
3.4.1. Nilai Parameter	28
3.4.2. Nilai Awal Variabel	28



DAFTAR GAMBAR

<u>2.4.1. Diagram Model SIR</u>	10
<u>2.5.1.(a) Stabil (b) Stabil Asimtotik</u>	12
<u>3.1.1. Diagram Model Modifikasi SIR</u>	16
<u>3.4.1. Grafik Solusi Kelompok Rentan</u>	31
<u>3.4.2. Grafik Solusi Kelompok Terinfeksi</u>	31
<u>3.4.3. Grafik Solusi Kelompok Sembuh</u>	32



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

World Health Organization (WHO), melalui estimasi demografi dalam *World Malaria Report 2018*, melaporkan bahwa terdapat kasus malaria sebanyak 212 juta orang dengan 435.000 orang mengalami kematian di seluruh dunia akibat malaria [16]. Malaria adalah salah satu penyakit menular yang mengancam jiwa yang disebabkan oleh parasit *Plasmodium* dan terjadi melalui gigitan nyamuk betina yang terinfeksi dari spesies *Anopheles* [17].

Indonesia merupakan wilayah dengan iklim tropis dan subtropis yang disukai oleh nyamuk *Anopheles sp.* Berdasarkan data Kementerian Kesehatan (Kemenkes) pada tahun 2022 terdapat kasus malaria sebanyak 415.140 kasus. Jumlah kasus tersebut melonjak 36,29 % dibandingkan pada tahun sebelumnya [18]. Melihat tingginya tingkat penularan malaria, maka pencegahan malaria sangat penting dilakukan. Menurut anjuran Kemenkes RI, dapat dilakukan beberapa upaya untuk mencegah malaria, yaitu membersihkan lingkungan dengan air mengalir dan membersihkan peralatan rumah secara rutin, menutup penampung air saat tidak digunakan, menggunakan obat anti nyamuk dan kelambu saat tidur untuk menghindari

gigitan nyamuk, dan menghindari aktivitas di dekat perairan saat malam hari karena nyamuk malaria lebih aktif di malam hari [2].

Beberapa peneliti sebelumnya telah memodelkan masalah yang berkaitan dengan penularan penyakit malaria ke dalam model matematika. Salah satu penelitian yang dilakukan oleh Osman dan kawan-kawan [13] yang membagi model matematika menjadi empat kelompok populasi yaitu *Susceptible Humans (S)*, *Exposed Humans (E)*, *Infectious Humans (I)*, dan *Removed Humans (R)*. Kemudian, mereka mempertimbangkan model transmisi malaria *SEIR – SEI* antara manusia dan nyamuk. Peneliti lainnya yaitu, Affandi [1] yang membagi model matematika menjadi tiga kelompok populasi yaitu *Susceptible (S)*, *Infected (I)*, dan *Removed (R)*. Peneliti ini menganalisis tingkat infeksi malaria dengan menggunakan model distribusi malaria.

Untuk mengetahui dinamika penularan penyakit malaria di Indonesia, model matematika dapat digunakan sebagai suatu alternatif dalam merepresentasikan permasalahan yang terjadi. Model yang digunakan dalam penelitian ini adalah model *SIR (Susceptible, Infected, Recovery)* yang dimodifikasi dari model yang ada pada [12]. Model tersebut dimodifikasi dengan menambahkan parameter (ω) yaitu laju individu yang sembuh kembali ke individu rentan. Selanjutnya, akan dilakukan analisis kestabilan model yang ditentukan dari nilai eigen matriks Jacobian dari masing-masing titik ekuilibrium untuk mengetahui apakah penyakit malaria terus menular atau menghilang dari populasi. Kemudian, solusi sistem penyakit malaria

disimulasikan secara numerik dengan menggunakan *software* MAPLE.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, permasalahan yang akan dikaji pada penelitian ini adalah:

1. bagaimana mengkonstruksi model modifikasi *SIR* penularan penyakit malaria di Indonesia dengan tambahan parameter laju individu yang sembuh kembali ke individu rentan,
2. bagaimana menganalisis kestabilan model modifikasi *SIR* penularan penyakit malaria di Indonesia,
3. bagaimana simulasi numerik model modifikasi *SIR* penularan penyakit malaria di Indonesia.

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini akan digunakan model modifikasi *SIR* yang diimplementasikan pada data penderita penyakit malaria di Indonesia untuk tahun 2022, yang datanya diperoleh dari Badan Pusat Statistika (BPS) dan Kementerian Kesehatan Republik Indonesia.

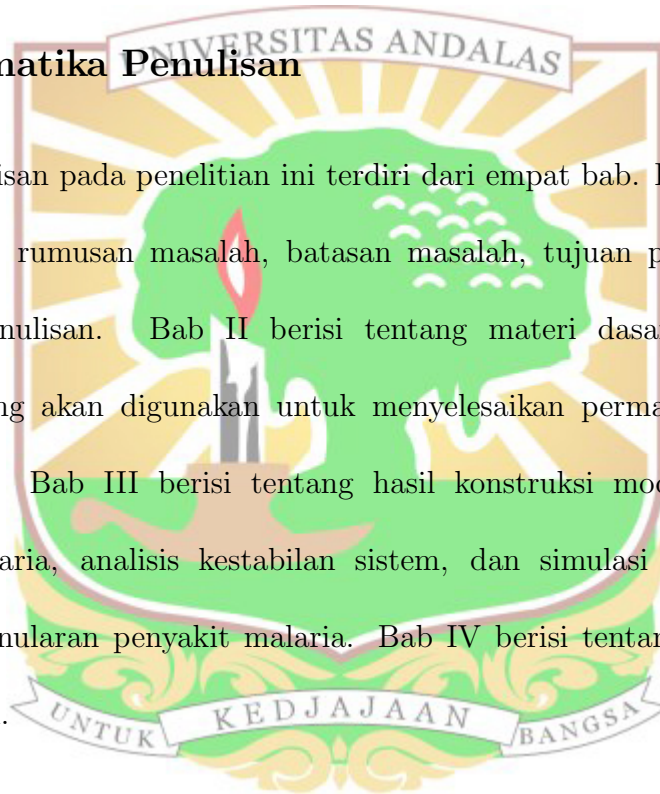
1.4 Tujuan Penulisan

Berdasarkan permasalahan di atas, maka tujuan dari penulisan pada penelitian ini adalah:

1. untuk mengetahui dinamika model modifikasi *SIR* yang menggambarkan penularan penyakit malaria di Indonesia,
2. untuk mengetahui kondisi bebas dan kondisi endemik penularan penyakit malaria di Indonesia,
3. untuk mengetahui tingkat penularan penyakit malaria di Indonesia.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan pada penelitian ini terdiri dari empat bab. Bab I memuat latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan. Bab II berisi tentang materi dasar dan materi pendukung yang akan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan pada penelitian ini. Bab III berisi tentang hasil konstruksi model modifikasi penularan malaria, analisis kestabilan sistem, dan simulasi numerik dari model *SIR* penularan penyakit malaria. Bab IV berisi tentang kesimpulan hasil penelitian.



BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini disajikan model dasar penyebaran penyakit, teori-teori persamaan diferensial, dan analisis kestabilan model *SIR* yang akan digunakan pada Bab III.

2.1 Teori Dasar Matriks

Matriks adalah susunan bilangan atau simbol yang disusun dalam baris dan kolom sehingga membentuk suatu bangun persegi atau persegi panjang. Bilangan atau simbol dalam matriks disebut entri matriks. Entri matriks yang muncul di baris i dan kolom j dari matriks A dilambangkan dengan a_{ij} . Jika matriks A memiliki m baris dan n kolom, maka matriks A disebut sebagai matriks berukuran $m \times n$ yang dinyatakan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.1.1. [3] Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$. Suatu vektor tak nol $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dikatakan vektor eigen dari A jika $A\mathbf{x}$ adalah kelipatan skalar dari \mathbf{x} , yaitu

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{2.1.1}$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ disebut nilai eigen dari A dan \mathbf{x} disebut sebagai vektor eigen yang berkaitan dengan λ .

Untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A , maka persamaan (2.1.1) dapat ditulis, sebagai

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (2.1.2)$$

dengan I adalah matriks identitas $n \times n$. Persamaan (2.1.2) memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (2.1.3)$$

Persamaan (2.1.3) dikatakan sebagai persamaan karakteristik bagi matriks A .

2.2 Polinomial

Polinomial atau suku banyak adalah bentuk persamaan yang melibatkan jumlahan perkalian pangkat dalam satu atau lebih variabel dengan koefisien. Bentuk umum dari suatu polinomial adalah,

$$P(n) = a_n \tau^n + a_{n-1} \tau^{n-1} + \dots + a_1 \tau + a,$$

dengan $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a \in \mathbb{R}$ merupakan koefisien-koefisien suku banyak, $a_n \neq 0$ dimana n adalah bilangan bulat positif, dan pangkat dari x adalah derajat polinomial.

Untuk menentukan kestabilan sistem digunakan kestabilan polinomial dengan memperhatikan koefisiennya tanpa perlu menghitung

akar-akar dari persamaan karakteristik. Secara umum sistem dengan orde ke n memiliki persamaan karakteristik sebagai berikut,

$$\tau^n + a_1\tau^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (2.2.1)$$

dengan $a_i \in \mathbb{R}$ untuk setiap $i = 0, 1, \dots, n$ dan $a_n \neq 0$.

Proposisi 2.2.1. [6] Misalkan a , b , dan c adalah bilangan riil. Nilai-nilai eigen dari persamaan karakteristik,



mempunyai bagian riil negatif jika dan hanya jika a , b , dan c positif dan $ab - c > 0$.

2.3 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas. Berdasarkan banyaknya variabel bebas persamaan diferensial dibedakan menjadi dua yaitu, Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan Persamaan Diferensial Parsial (PDP).

Berdasarkan kehomogenan persamaan diferensial dibedakan menjadi dua yaitu, homogen dan nonhomogen. Persamaan diferensial dikatakan homogen jika setiap suku persamaan diferensial memuat variabel terikat atau turunannya, sedangkan persamaan diferensial dikatakan nonhomogen jika terdapat suku pada persamaan diferensial yang tidak memuat variabel terikat atau turunannya.

Berdasarkan kemandirian persamaan diferensial dibedakan menjadi dua yaitu, mandiri dan tak mandiri. Persamaan diferensial dikatakan mandiri jika koefisien (yang menyertai variabel terikat atau turunannya) bernilai konstan, sedangkan persamaan diferensial dikatakan tak mandiri jika koefisien (yang menyertai variabel terikat atau turunannya) bernilai tidak konstan.

Selanjutnya berdasarkan kelinieran persamaan diferensial dibedakan menjadi dua yaitu:

- (a.) Persamaan diferensial linier adalah suatu persamaan yang variabel terikat atau turunannya muncul dalam pangkat satu, tidak ada perkalian antara variabel terikat atau dengan turunannya, dan tidak ada fungsi transenden terhadap variabel terikat.
- (b.) Persamaan diferensial nonlinier adalah persamaan diferensial yang tak linier pada fungsi dan turunannya.

Selanjutnya, beberapa istilah yang terdapat dalam persamaan diferensial yaitu:

- (a.) Orde adalah turunan tertinggi yang muncul pada persamaan diferensial.
- (b.) Derajat adalah pangkat tertinggi yang muncul pada persamaan diferensial [15].

Misal diberikan contoh berikut:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0, \quad (2.3.1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 4\cos x, \quad (2.3.2)$$

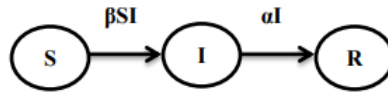
$$2\frac{dy}{dx} + 4x^2y = 2x^2. \quad (2.3.3)$$

Contoh tersebut dapat dikelompokkan sebagai berikut,

1. Persamaan (2.3.1) adalah PDB orde dua, nonlinier, homogen, dan mandiri.
2. Persamaan (2.3.2) adalah PDB orde dua, linier, nonhomogen, dan mandiri.
3. Persamaan (2.3.3) adalah PDB orde satu, linier, nonhomogen, dan tak mandiri.

2.4 Model Dasar Penyebaran Penyakit

Model dasar untuk penyebaran penyakit pertama kali dirumuskan pada tahun 1927 oleh Kermack dan McKendrick. Dalam model ini, populasi diklasifikasikan menjadi tiga kelompok, yaitu rentan (*Susceptible*), terinfeksi (*Infected*), dan sembuh (*Recovery*). Model ini dikembangkan dengan beberapa asumsi, yaitu sistem tertutup (tidak ada kelahiran, tidak ada kematian, dan tidak ada migrasi), populasi homogen, dan penularan penyakit terjadi melalui kontak antara individu yang rentan dan terinfeksi [4]. Diagram model dasar *SIR* diperlihatkan pada Gambar 2.4.1



Gambar 2.4.1: Diagram Model *SIR*

Dari Gambar [2.4.1](#) dapat dinyatakan model *SIR* sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \alpha I, \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I, \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

dimana S adalah banyak individu kelompok rentan (*Susceptible*), I adalah banyak individu kelompok terinfeksi (*Infected*), R adalah banyak individu kelompok sembuh (*Recovery*), β adalah laju penularan penyakit, dan α adalah laju kesembuhan penyakit. Total populasi dapat dinyatakan sebagai,

$$N = S + I + R \tag{2.4.2}$$

dan akan bernilai konstan jika,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0. \tag{2.4.3}$$

Pada model [\(2.4.1\)](#), kelompok individu rentan berkontak langsung dengan kelompok individu terinfeksi dengan laju sebesar β . Terjadinya kontak tersebut menyebabkan kelompok individu S berkurang sebesar βSI dan kelompok individu I menjadi bertambah sebesar βSI . Kelompok individu terinfeksi menjadi berkurang sebesar αI karena individu yang terinfeksi sembuh dari penyakit, sedangkan kelompok individu sembuh akan bertambah sebesar αI karena terdapat perpindahan dari individu terinfeksi ke individu sembuh [\[4\]](#).

2.5 Kestabilan Sistem

Perhatikan sistem persamaan diferensial nonlinier berikut,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}). \quad (2.5.1)$$

Dalam menganalisis kestabilan dari sistem nonlinier (2.5.1), perlu diketahui keadaan (stabil dan stabil asimtotik) pada titik ekuilibrium [7]. Hal ini ditunjukkan oleh tiga definisi berikut,

Definisi 2.5.1. [10] Suatu titik ekuilibrium merupakan titik yang memenuhi persamaan $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Definisi 2.5.2. [3] Misalkan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ adalah suatu vektor di \mathbb{R}^n . Norm dari \mathbf{x} yang dinotasikan dengan $\|\mathbf{x}\|$, didefinisikan sebagai

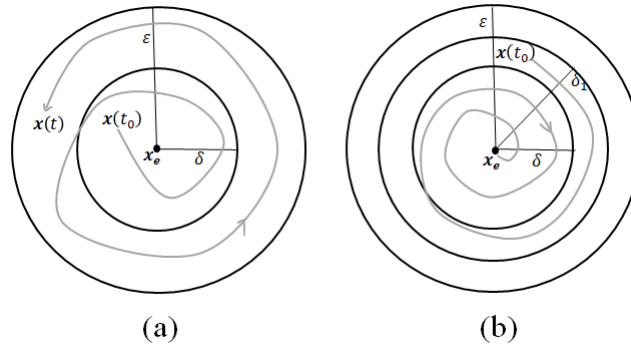
$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Definisi 2.5.3. [10] Suatu titik ekuilibrium \mathbf{x}_e dikatakan stabil untuk sistem (2.5.1) jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_e\| < \delta$ berlaku $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq t_0$.

Definisi 2.5.4. [10] Suatu titik ekuilibrium \mathbf{x}_e dikatakan stabil asimtotik untuk sistem (2.5.1) jika titik ekuilibrium \mathbf{x}_e stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sehingga $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| = 0$, dengan $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_e\| < \delta_1$.

Berdasarkan definisi, suatu titik ekuilibrium dikatakan stabil jika pada awalnya kurva solusi dekat dengan titik ekuilibrium, maka seiring bertambahnya waktu posisi kurva solusi tetap dekat terhadap titik ekuilibrium. Suatu titik ekuilibrium dikatakan stabil asimtotik jika titik

ekuilibrium stabil dan seiring bertambahnya waktu maka kurva solusi semakin menuju titik ekuilibrium. Ilustrasi titik ekuilibrium stabil dan stabil asimtotik ditunjukkan pada Gambar 2.5.1 berikut,



Gambar 2.5.1: (a) Stabil (b) Stabil Asimtotik

Kestabilan titik ekuilibrium \mathbf{x}_e dapat ditentukan dengan melinierkan sistem (2.5.1) di sekitar titik ekuilibrium \mathbf{x}_e menggunakan ekspansi deret Taylor [10].

Perhatikan sistem nonlinier (2.5.1) \mathbb{R}^2 berikut:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= h_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= h_2(x_1, x_2).\end{aligned}\tag{2.5.2}$$

Misalkan fungsi $h_i(x_1, x_2), i = 1, 2$ memiliki turunan yang kontinu di sekitar titik ekuilibrium $\mathbf{x}_e = (u, v)$. Sistem $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ akan diekspansi menggunakan deret Taylor dari $h_i(x_1, x_2), i = 1, 2$ menjadi,

$$\begin{aligned}h_1(\mathbf{x}) &= h_1(\mathbf{x}_e) + (x_1 - u) \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_e) + (x_2 - v) \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_e) + \text{suku orde tinggi}, \\ h_2(\mathbf{x}) &= h_2(\mathbf{x}_e) + (x_1 - u) \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_e) + (x_2 - v) \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_e) + \text{suku orde tinggi}.\end{aligned}\tag{2.5.3}$$

Misalkan $y_1 = x_1 - u$ dan $y_2 = x_2 - v$. Karena \mathbf{x}_e merupakan titik ekuilibrium dari persamaan (2.5.2), maka $h_i(\mathbf{x}_e) = 0$, untuk $i = 1, 2$. Dengan mengabaikan suku orde tinggi maka sistem (2.5.3) dapat ditulis menjadi,

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_e) + y_2 \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_e), \\ \dot{y}_2 &= y_1 \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_e) + y_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_e).\end{aligned}\tag{2.5.4}$$

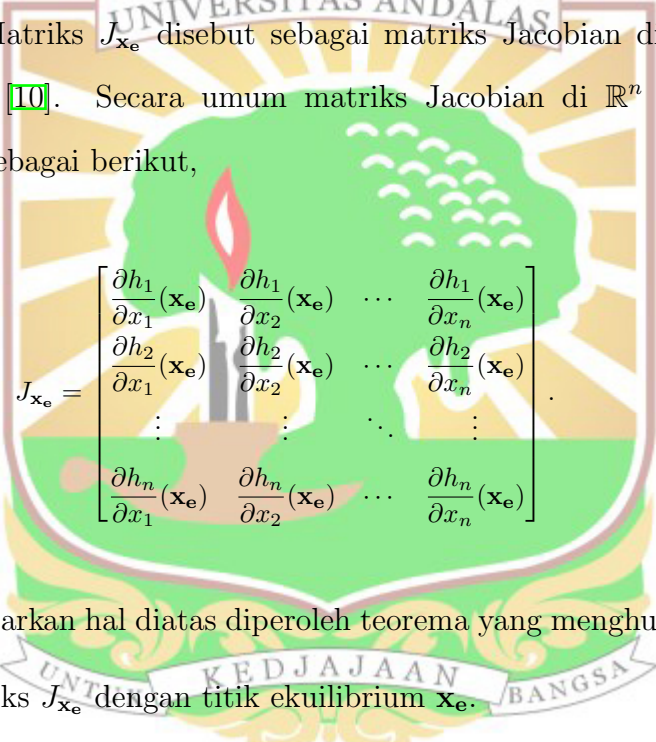
Selanjutnya persamaan (2.5.4) dapat ditulis dalam bentuk matriks yaitu,

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_e) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_e) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_e) & \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

atau dapat disederhanakan menjadi,

$$\dot{\mathbf{y}} = J_{\mathbf{x}_e} \mathbf{y}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2. \quad (2.5.5)$$

Sistem (2.5.5) adalah linierisasi dari sistem (2.5.2) di sekitar titik ekuilibrium $\mathbf{x}_e = (u, v)$. Matriks $J_{\mathbf{x}_e}$ disebut sebagai matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium \mathbf{x}_e [10]. Secara umum matriks Jacobian di \mathbb{R}^n dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut,



$$J_{\mathbf{x}_e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_e) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_e) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_e) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_e) & \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_e) & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_e) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}_e) & \frac{\partial h_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}_e) & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}_e) \end{bmatrix}. \quad (2.5.6)$$

Berdasarkan hal diatas diperoleh teorema yang menghubungkan nilai eigen dari matriks $J_{\mathbf{x}_e}$ dengan titik ekuilibrium \mathbf{x}_e .

Teorema 2.5.1. [7] *Perhatikan sistem (2.5.5), jika semua nilai eigen dari matriks $J_{\mathbf{x}_e}$ memiliki bagian riil negatif, maka titik ekuilibrium \mathbf{x}_e stabil asimtotik.*

2.6 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah rata-rata jumlah individu yang terinfeksi akibat tertular oleh satu individu yang sudah terinfeksi.

Bilangan reproduksi dasar disebut juga dengan parameter ambang batas dan merupakan parameter yang menentukan apakah suatu populasi bebas penyakit atau terinfeksi penyakit. Kondisi yang akan timbul berdasarkan nilai R_0 adalah sebagai berikut :

1. jika $R_0 < 1$ maka penyakit tidak menyebar dan akhirnya akan hilang,
2. jika $R_0 > 1$ maka penyakit akan menyebar dan menjadi wabah,
3. jika $R_0 = 1$ maka penyakit akan menjadi endemi [11].

Bilangan reproduksi dasar diperoleh dengan menggunakan metode *Next Generation Matrix*. Metode *Next Generation Matrix* dikonstruksi dari kelompok individu terinfeksi. Langkah-langkah menentukan bilangan reproduksi dasar adalah sebagai berikut [5]:

1. mengkonstruksi matriks Jacobian J yang dibentuk dari matriks transmisi T dan matriks transisi Σ . Matriks transmisi T adalah matriks yang menyatakan adanya infeksi baru, sedangkan matriks transisi Σ adalah matriks yang menyatakan perubahan individu dari kelompok terinfeksi menjadi kelompok sembuh. Subsistem terinfeksi dapat ditulis dalam bentuk,

$$\dot{\mathbf{x}} = [T - \Sigma] \mathbf{x}.$$

2. mengkonstruksi *Next Generation Matrix* $K = T\Sigma^{-1}$ untuk mendapatkan nilai eigen terbesar yang merupakan bilangan reproduksi dasar.

BAB III

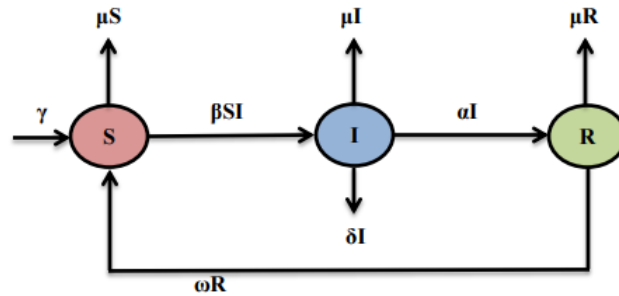
PEMBAHASAN

3.1 Model Modifikasi *SIR* Penyakit Malaria

Model modifikasi *SIR* yang menggambarkan penyakit menular dibagi menjadi tiga kelompok populasi. Pertama, rentan (*Susceptible*) merupakan jumlah populasi yang rentan terhadap penyakit malaria. Kedua, terinfeksi (*Infected*) merupakan jumlah populasi yang terinfeksi penyakit malaria. Ketiga, sembuh (*Recovery*) merupakan jumlah populasi yang sembuh dari penyakit malaria. Model dimodifikasi berdasarkan asumsi sebagai berikut:

1. setiap individu yang lahir langsung masuk ke dalam kelompok rentan,
2. adanya kematian alami setiap individu yang rentan, terinfeksi, dan sembuh,
3. penyakit dapat menular melalui kontak antara individu dengan nyamuk,
4. individu yang terinfeksi penyakit malaria dapat sembuh dan dapat mengalami kematian karena penyakit,
5. individu yang sudah sembuh dapat terkena penyakit kembali,
6. individu yang berobat semuanya sudah sembuh.

Diagram model modifikasi *SIR* penularan penyakit malaria dapat dilihat pada Gambar 3.1.1 berikut.



Gambar 3.1.1: Diagram Model Modifikasi *SIR*

Model modifikasi *SIR* penularan penyakit malaria dapat dinyatakan ke dalam sistem persamaan diferensial nonlinier berikut,

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \gamma - \beta SI - \mu S + \omega R, \\
 \frac{dI}{dt} &= \beta SI - (\alpha + \delta + \mu)I, \\
 \frac{dR}{dt} &= \alpha I - (\mu + \omega)R,
 \end{aligned}
 \tag{3.1.1}$$

dengan parameter $\beta, \alpha, \omega, \gamma, \delta, \mu$ adalah konstanta positif. Keterangan setiap parameter dapat dilihat pada Tabel 3.1.1 berikut ini.

Tabel 3.1.1: Parameter Model Modifikasi *SIR*

Parameter	Deskripsi
γ	Laju kelahiran
β	Laju penularan penyakit malaria
α	Laju kesembuhan penyakit malaria
ω	Laju individu yang sembuh kembali ke individu rentan
μ	Laju kematian alami
δ	Laju kematian akibat terinfeksi penyakit malaria

Pada sistem (3.1.1), perubahan populasi pada waktu t yaitu :

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt}, \\ &= \gamma - \mu S - \delta I - \mu I - \mu R, \\ &= \gamma - \mu N - \delta I.\end{aligned}$$

Karena $\frac{dN}{dt} \neq 0$, maka populasi $N(t)$ tidak konstan.

3.2 Analisis Kestabilan Sistem

Kestabilan dari sistem (3.1.1) dianalisis dengan menentukan titik ekuilibrium bebas penyakit, titik ekuilibrium endemik, dan bilangan reproduksi dasar. Kemudian, dilanjutkan dengan menganalisis kestabilannya pada titik-titik ekuilibrium tersebut. Dengan menggunakan Definisi 2.5.1, tiap persamaan pada sistem (3.1.1) menjadi,

$$\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0. \quad (3.2.1)$$

Persamaan pada sistem (3.2.1) berturut-turut dapat dinyatakan kembali dengan,

$$\gamma - \beta SI - \mu S + \omega R = 0, \quad (3.2.2)$$

$$\beta SI - (\alpha + \delta + \mu)I = 0, \quad (3.2.3)$$

$$\alpha I - (\mu + \omega)R = 0. \quad (3.2.4)$$

3.2.1 Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Notasikan titik ekuilibrium bebas penyakit sebagai $E^0 = (S^0, I^0, R^0)$. Titik ekuilibrium bebas penyakit menunjukkan kondisi

dimana tidak ada penyebaran penyakit yang terjadi dalam populasi ($I^0 = 0$).

Dengan mensubstitusi $I^0 = 0$ ke persamaan (3.2.4) diperoleh,

$$R^0(-\mu - \omega) = 0.$$

Karena μ dan ω masing-masing tidak sama dengan 0 maka haruslah,

$$R^0 = 0.$$

Dengan cara yang sama dimana $I^0 = 0$ dan $R^0 = 0$, maka persamaan (3.2.2) menjadi,

$$\begin{aligned} \gamma - \mu S^0 &= 0, \\ S^0 &= \frac{\gamma}{\mu}. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Oleh karena itu, diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit,

$$E^0 = (S^0, I^0, R^0) = \left(\frac{\gamma}{\mu}, 0, 0 \right). \quad (3.2.6)$$

3.2.2 Titik Ekuilibrium Endemik

Notasikan titik ekuilibrium endemik sebagai $E^* = (S^*, I^*, R^*)$. Titik ekuilibrium endemik mengungkapkan kondisi dimana terdapat individu yang terinfeksi dalam populasi ($I^* > 0$). Berdasarkan persamaan (3.2.3) dengan $I^* > 0$, maka dapat dihasilkan

$$S^* = \frac{(\alpha + \delta + \mu)}{\beta}. \quad (3.2.7)$$

Substitusikan persamaan (3.2.7) ke persamaan (3.2.2) diperoleh,

$$I^* = \frac{\gamma\beta + \omega R^*\beta - \alpha\mu - \delta\mu - \mu^2}{\beta(\alpha + \delta + \mu)}. \quad (3.2.8)$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (3.2.8) ke persamaan (3.2.4) diperoleh,

$$R^* = \frac{\alpha(\gamma\beta - \alpha\mu - \delta\mu - \mu^2)}{\beta(\alpha\mu + \delta\mu + \mu^2 + \omega\delta + \omega\mu)}. \quad (3.2.9)$$

Kemudian substitusikan persamaan (3.2.9) ke persamaan (3.2.4) sehingga diperoleh,

$$I^* = \frac{(\gamma\beta - \alpha\mu - \delta\mu - \mu^2)(\mu + \omega)}{\beta(\alpha\mu + \delta\mu + \mu^2 + \omega\delta + \omega\mu)}. \quad (3.2.10)$$

Oleh karena itu titik ekuilibrium endemik E^* adalah

$$E^* = (S^*, I^*, R^*),$$

$$E^* = \left(\frac{(\alpha + \delta + \mu)}{\beta}, \frac{(\gamma\beta - \alpha\mu - \delta\mu - \mu^2)(\mu + \omega)}{\beta(\alpha\mu + \delta\mu + \mu^2 + \omega\delta + \omega\mu)}, \frac{\alpha(\gamma\beta - \alpha\mu - \delta\mu - \mu^2)}{\beta(\alpha\mu + \delta\mu + \mu^2 + \omega\delta + \omega\mu)} \right). \quad (3.2.11)$$

3.2.3 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar (R_0) untuk sistem (3.1.1) ditentukan menggunakan metode *Next Generation Matrix* yang diperoleh dari persamaan kelas terinfeksi sebagai berikut,

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - (\alpha + \delta + \mu)I. \quad (3.2.12)$$

Kemudian misalkan $x = [I]'$ menyatakan matriks transpose untuk persamaan dari kelompok yang terlibat dalam penyebaran penyakit tersebut. Matriks Jacobian dari persamaan (3.2.12) adalah,

$$J = \left[\frac{\partial(\frac{dI}{dt})}{\partial I} \right],$$

$$J = \left[\beta S - (\alpha + \delta + \mu) \right]. \quad (3.2.13)$$

Akibatnya pada titik ekuilibrium bebas penyakit $E^0 = (S^0, I^0, R^0)$, diperoleh matriks Jacobian yaitu,

$$J_{E^0} = \begin{bmatrix} \beta S^0 - (\alpha + \delta + \mu) \end{bmatrix}. \quad (3.2.14)$$

Dengan menggunakan persamaan (3.2.5) maka persamaan (3.2.14) dapat diuraikan menjadi pengurangan antara matriks transmisi T dan matriks transisi Σ yaitu,

$$J = T - \Sigma, \\ = \begin{bmatrix} \beta \gamma \\ \mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\alpha + \delta + \mu) \end{bmatrix}.$$

dengan menggunakan *Next Generation Matrix* diperoleh,

$$K = T \Sigma^{-1}, \\ = \begin{bmatrix} \beta \gamma \\ \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ (\alpha + \delta + \mu) \end{bmatrix}, \\ = \begin{bmatrix} \beta \gamma \\ \mu(\alpha + \delta + \mu) \end{bmatrix}.$$

Maka bilangan reproduksi dasar yaitu,

$$R_0 = \frac{\beta \gamma}{\mu(\alpha + \delta + \mu)}. \quad (3.2.15)$$

3.3 Kestabilan Titik Ekuilibrium

Sistem (3.1.1) merupakan sistem persamaan diferensial non linier.

Dengan menggunakan (2.5.6) matriks Jacobian dari sistem (3.1.1) adalah,

$$J = \begin{bmatrix} -\beta I - \mu & -\beta S & \omega \\ \beta I & \beta S - (\alpha + \delta + \mu) & 0 \\ 0 & \alpha & -\mu - \omega \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan Teorema [2.5.1](#), kestabilan sistem pada titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit dapat ditentukan dengan menggunakan nilai eigen dari matriks Jacobian yang sudah diperoleh.

3.3.1 Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Matriks Jacobian di titik ekuilibrium bebas penyakit E^0 adalah,

$$\begin{aligned}
 J_{E^0} &= J_{\left(\frac{\gamma}{\mu}, 0, 0\right)} \\
 &= \begin{bmatrix} -\beta(0) - \mu & -\beta \frac{\gamma}{\mu} & \omega \\ \beta(0) & \beta \frac{\gamma}{\mu} - (\alpha + \delta + \mu) & 0 \\ 0 & \alpha & -\mu - \omega \end{bmatrix}, \\
 &= \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta\gamma}{\mu} & \omega \\ 0 & \frac{\beta\gamma}{\mu} - (\alpha + \delta + \mu) & 0 \\ 0 & \alpha & -\mu - \omega \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Nilai eigen matriks Jacobian di titik ekuilibrium bebas penyakit diperoleh dengan menggunakan persamaan karakteristik, yaitu

$$\det \left(\begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta\gamma}{\mu} & \omega \\ 0 & \frac{\beta\gamma}{\mu} - (\alpha + \delta + \mu) & 0 \\ 0 & \alpha & -\mu - \omega \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -\mu - \lambda & -\frac{\beta\gamma}{\mu} & \omega \\ 0 & \frac{\beta\gamma}{\mu} - (\alpha + \delta + \mu) - \lambda & 0 \\ 0 & \alpha & -\mu - \omega - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(-\mu - \lambda)\left(\frac{\beta\gamma}{\mu} - (\alpha + \delta + \mu) - \lambda\right)(-\mu - \omega - \lambda) = 0. \quad (3.3.1)$$

Dari persamaan (3.3.1) diperoleh,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\mu, \\ \lambda_2 &= \frac{\beta\gamma}{\mu} - (\alpha + \delta + \mu), \\ \lambda_3 &= -\mu - \omega. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Menurut Teorema 2.5.1, titik ekuilibrium bebas penyakit dikatakan stabil asimtotik jika $\lambda_i < 0$ dimana $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Agar semua nilai eigen bernilai negatif maka,

- (i.) $\lambda_1 < 0 \Rightarrow -\mu < 0$.
- (ii.) $\lambda_2 < 0$. Perhatikan bahwa,

$$\frac{\beta\gamma}{\mu} - (\alpha + \delta + \mu) < 0,$$

$$\frac{\beta\gamma}{\mu} < (\alpha + \delta + \mu),$$

$$\frac{\beta\gamma}{\mu(\alpha + \delta + \mu)} < 1,$$

$$R_0 < 1,$$

memenuhi jika $R_0 < 1$.

- (iii.) $\lambda_3 < 0 \Rightarrow -\mu - \omega < 0$.

Berdasarkan Teorema 2.5.1, titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik jika (i), (ii), dan (iii) bernilai negatif.

3.3.2 Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik

Matriks Jacobian pada titik ekuilibrium endemik E^* adalah,

$$J_{E^*} = J_{(S^*, I^*, R^*)},$$

$$= \begin{bmatrix} -\beta I^* - \mu & -\beta S^* & \omega \\ \beta I^* & \beta S^* - (\alpha + \delta + \mu) & 0 \\ 0 & \alpha & -\mu - \omega \end{bmatrix}.$$

Sama seperti langkah sebelumnya, nilai eigen dari matriks Jacobian di titik ekuilibrium endemik diperoleh dengan menggunakan persamaan karakteristik, yaitu

$$\det \left(\begin{bmatrix} -\beta I^* - \mu & -\beta S^* & \omega \\ \beta I^* & \beta S^* - (\alpha + \delta + \mu) & 0 \\ 0 & \alpha & -\mu - \omega \end{bmatrix} - \lambda \mathbf{I} \right) = 0,$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} -\beta I^* - \mu - \lambda & -\beta S^* & \omega \\ \beta I^* & \beta S^* - (\alpha + \delta + \mu) - \lambda & 0 \\ 0 & \alpha & -\mu - \omega - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0.$$

Misalkan $X = -\beta I^* - \mu$, $Y = \beta S^* - (\alpha + \delta + \mu)$ dan $Z = -\mu - \omega$, maka

$$\begin{vmatrix} X - \lambda & -\beta S^* & \omega \\ \beta I^* & Y - \lambda & 0 \\ 0 & \alpha & Z - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$((X - \lambda)(Y - \lambda)(Z - \lambda) + \omega \beta I^* \alpha) - ((-\beta S^*)(\beta I^*)(Z - \lambda)) = 0,$$

$$\begin{aligned}
&XYZ - \lambda XZ - \lambda YZ + \lambda^2 Z - \lambda XY + \lambda^2 X + \lambda^2 Y - \lambda^3 + \omega \beta I^* \alpha \\
&\qquad\qquad\qquad -(-\beta^2 S^* I^* Z + \lambda \beta^2 S^* I^*) = 0, \\
&-\lambda^3 + (X + Y + Z)\lambda^2 + (-XZ - YZ - XY - \beta^2 S^* I^*)\lambda + XYZ \\
&\qquad\qquad\qquad + \omega \beta I^* \alpha + \beta^2 S^* I^* Z = 0, \\
&\lambda^3 + (-X - Y - Z)\lambda^2 + (XZ + YZ + XY + \beta^2 S^* I^*)\lambda - XYZ \\
&\qquad\qquad\qquad - \omega \beta I^* \alpha - \beta^2 S^* I^* Z = 0.
\end{aligned}$$

Persamaan ini merupakan persamaan karakteristik dari matriks J_{E^*} yaitu,

$$\lambda^3 + S\lambda^2 + T\lambda + P = 0. \quad (3.3.3)$$

dengan,

$$\begin{aligned}
S &= -X - Y - Z, \\
&= -(-\beta I^* - \mu) - (\beta S^* - (\alpha + \delta + \mu)) - (-\mu - \omega), \\
&= \beta I^* + \mu - \beta S^* + \alpha + \delta + \mu + \mu + \omega, \\
&= \beta(I^* - S^*) + \alpha + \delta + 3\mu + \omega,
\end{aligned}$$

dan,

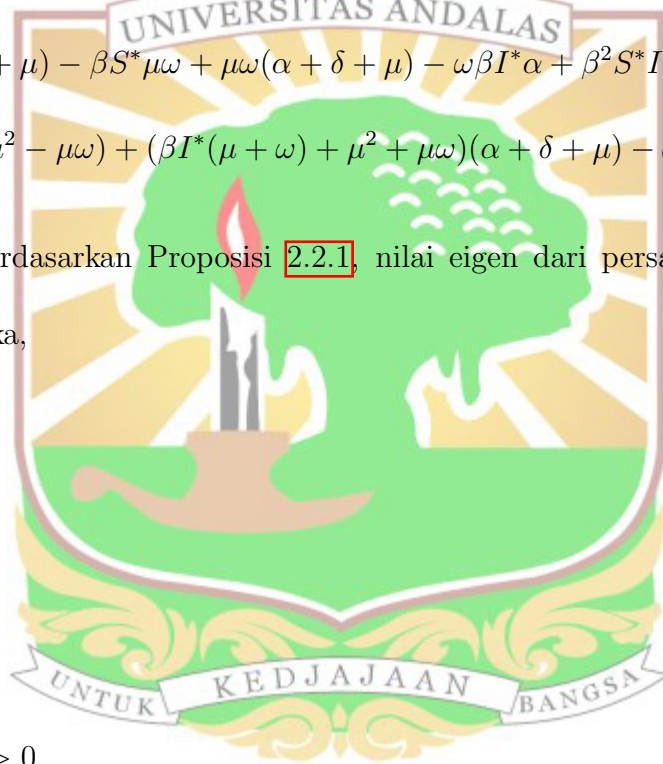
$$\begin{aligned}
T &= XZ + YZ + XY - \beta^2 S^* I^*, \\
&= (-\beta I^* - \mu)(-\mu - \omega) + (\beta S^* - (\alpha + \delta + \mu))(-\mu - \omega) + \\
&\quad (-\beta I^* - \mu)(\beta S^* - (\alpha + \delta + \mu)) - \beta^2 S^* I^*, \\
&= \beta I^* \mu + \beta I^* \omega + \mu^2 + \omega \mu - \beta S^* \mu - \beta S^* \omega + \mu(\alpha + \delta + \mu) + \omega(\alpha + \delta + \mu) - \\
&\quad \beta^2 S^* I^* + \beta I^*(\alpha + \delta + \mu) - \beta S^* \mu + \mu(\alpha + \delta + \mu) - \beta^2 S^* I^*, \\
&= \beta I^*(\mu + \omega - 2\beta S^* + (\alpha + \delta + \mu)) - \beta S^*(2\mu + \omega) + (\alpha + \delta + \mu)(2\mu + \omega) + \\
&\quad \mu(\mu + \omega),
\end{aligned}$$

serta,

$$\begin{aligned}
P &= -XYZ - \omega\beta I^* \alpha - \beta^2 S^* I^* Z, \\
&= -(-\beta I^* - \mu)(\beta S^* - (\alpha + \delta + \mu))(-\mu - \omega) - \omega\beta I^* \alpha - \beta^2 S^* I^* (-\mu - \omega), \\
&= (\beta^2 S^* I^* - \beta I^* (\alpha + \delta + \mu) + \beta S^* \mu - \mu(\alpha + \delta + \mu))(-\mu - \omega) - \omega\beta I^* \alpha + \\
&\quad \beta^2 S^* I^* \mu + \beta^2 S^* I^* \omega, \\
&= -\beta^2 S^* I^* \mu + \beta I^* \mu (\alpha + \delta + \mu) - \beta S^* \mu^2 + \mu^2 (\alpha + \delta + \mu) - \beta^2 S^* I^* \omega + \beta I^* \omega \\
&\quad (\alpha + \delta + \mu) - \beta S^* \mu \omega + \mu \omega (\alpha + \delta + \mu) - \omega \beta I^* \alpha + \beta^2 S^* I^* \mu + \beta^2 S^* I^* \omega, \\
&= \beta S^* (-\mu^2 - \mu \omega) + (\beta I^* (\mu + \omega) + \mu^2 + \mu \omega) (\alpha + \delta + \mu) - \omega \beta I^* \alpha.
\end{aligned}$$

Selanjutnya berdasarkan Proposisi 2.2.1, nilai eigen dari persamaan (3.3.3) akan negatif jika,

- (i.) $S > 0$.
- (ii.) $T > 0$.
- (iii.) $P > 0$.
- (iv.) $ST - P > 0$.



Dengan demikian, titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik jika syarat (i), (ii), (iii), dan (iv) terpenuhi.

3.4 Simulasi Numerik

Pada subbab ini, model modifikasi *SIR* penularan penyakit malaria disimulasikan pada data kasus penyakit malaria di Indonesia.

3.4.1 Data Kasus Penyakit Malaria di Indonesia

1. Nilai Variabel

Berdasarkan data Badan Pusat Statistika (BPS), jumlah penduduk Indonesia tahun 2022 sebanyak 275.770.000 jiwa [14]. Jumlah kasus malaria yang terinfeksi di Indonesia tahun 2022 sebanyak 415.140 kasus [18]. Berdasarkan data Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, jumlah individu yang berobat dari Januari 2022 hingga Agustus 2022 yaitu 229.015 jiwa [9]. Jumlah individu rentan dapat diperoleh dari $S = N - I - R$, sehingga nilai S adalah 275.125.845.

2. Laju Kelahiran (γ)

Berdasarkan data Badan Pusat Statistika (BPS) jumlah kelahiran di Indonesia tahun 2022 sebesar 4,45 juta jiwa [14]. Data simulasi dikonversikan ke dalam satuan hari, maka

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\text{jumlah kelahiran}}{\text{jumlah penduduk} \times 365 \text{ hari}} \\ &= \frac{4.450.000}{275.770.000 \times 365 \text{ hari}} = 0,000044/\text{hari}.\end{aligned}$$

3. Laju Kematian Alami (μ)

Berdasarkan data Badan Pusat Statistika (BPS) jumlah kematian di Indonesia tahun 2022 sebesar 1,73 juta jiwa [14]. Data simulasi dikonversikan ke dalam satuan hari, maka

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\text{jumlah kematian}}{\text{jumlah penduduk} \times 365 \text{ hari}} \\ &= \frac{1.730.000}{275.770.000 \times 365 \text{ hari}} = 0,000017/\text{hari}.\end{aligned}$$

4. Laju Penularan Penyakit Malaria (β)

Laju penularan penyakit malaria dapat ditentukan dengan perbandingan jumlah kasus yang terinfeksi malaria dengan jumlah kasus yang rentan terhadap malaria, sehingga

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\text{jumlah kasus terinfeksi}}{\text{jumlah yang rentan} \times 365 \text{ hari}} \\ &= \frac{415.140}{275.125.845 \times 365 \text{ hari}} = 0,0000041/\text{hari}.\end{aligned}$$

5. Laju Kesembuhan Penyakit Malaria (α)

Laju kesembuhan penyakit malaria dapat ditentukan dari perbandingan jumlah individu yang sembuh dengan jumlah individu yang terinfeksi dalam rentang waktu 8 bulan atau 240 hari, sehingga

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\text{jumlah yang sembuh}}{\text{jumlah yang terinfeksi} \times 240 \text{ hari}} \\ &= \frac{229.015}{415.140 \times 240 \text{ hari}} = 0,00229/\text{hari}.\end{aligned}$$

6. Laju Individu yang Sembuh Kembali ke Individu Rentan (ω)

Laju individu yang sembuh kembali ke individu rentan dapat dikonversikan ke dalam satuan hari yaitu,

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{\text{jumlah yang sembuh}}{\text{jumlah yang rentan} \times 240 \text{ hari}} \\ &= \frac{229.015}{275.125.845 \times 240 \text{ hari}} = 0,0000034/\text{hari}.\end{aligned}$$

7. Laju Kematian Akibat Terinfeksi Penyakit Malaria (δ)

Berdasarkan data Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, jumlah individu yang meninggal dari Januari 2022 hingga Mei 2022 yaitu 20 jiwa [8]. Laju kematian akibat penyakit malaria dapat ditentukan dari

perbandingan jumlah individu yang meninggal dengan jumlah individu yang terinfeksi dalam rentang waktu 5 bulan atau 150 hari, sehingga

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\text{jumlah yang meninggal}}{\text{jumlah yang terinfeksi} \times 150 \text{ hari}} \\ &= \frac{20}{415.140 \times 150 \text{ hari}} = 0,00000032/\text{hari}.\end{aligned}$$

Nilai-nilai parameter dinyatakan kembali dalam Tabel 3.4.1 sebagai berikut.

Tabel 3.4.1: Nilai Parameter

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
γ	0,000044	ω	0,0000034
β	0,0000041	δ	0,00000032
α	0,00229	μ	0,000017

Dalam bentuk proporsi, nilai awal dari sistem (3.1.1) pada saat $t = t_0$ sebesar $s(0)$, $i(0)$, $r(0)$ yang diperoleh dari, $s = \frac{S}{N}$ menyatakan proporsi populasi rentan, $i = \frac{I}{N}$ menyatakan proporsi populasi terinfeksi, dan $r = \frac{R}{N}$ menyatakan proporsi populasi sembuh. Nilai awal variabel dinyatakan dalam Tabel 3.4.2 sebagai berikut.

Tabel 3.4.2: Nilai Awal Variabel

Variabel	Nilai	Variabel	Nilai
$N(0)$	1	$i(0)$	0,0012
$s(0)$	0,998	$r(0)$	0,0008

3.4.2 Simulasi Model *SIR* Penularan Penyakit Malaria di Indonesia

Dengan mensubstitusikan nilai parameter pada Tabel 3.4.1 ke sistem (3.1.1), maka model modifikasi *SIR* penularan penyakit malaria di Indonesia menjadi,

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= 0,000044 - 0,0000041si - 0,000017s + 0,0000034r, \\ \frac{di}{dt} &= 0,0000041si - (0,00229 + 0,00000032 + 0,000017)i, \\ \frac{dr}{dt} &= 0,00229i - 0,000017r - 0,0000034r, \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

dengan nilai awal $s(0) = 0,998$, $i(0) = 0,0012$ dan $r(0) = 0,0008$.

Dengan mensubstitusikan nilai parameter pada Tabel 3.4.1 ke persamaan (3.2.6) diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu $E^0 = (2,58; 0; 0)$. Untuk menganalisis kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dari sistem (3.1.1), substitusikan nilai parameter pada Tabel 3.4.1, sehingga diperoleh

(i.) $R_0 < 1$. Nilai R_0 yaitu,

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\beta\gamma}{\mu(\alpha + \delta + \mu)}, \\ &= \frac{1,804 \times 10^{-10}}{1,7 \times 10^{-5}(2,3 \times 10^{-3})}, \\ &= \frac{1,804 \times 10^{-10}}{3,91 \times 10^{-8}}, \\ &= 0,0046. \end{aligned}$$

Karena $R_0 < 1$ maka nilai $R_0 = 0,0046$ memenuhi.

(ii.) $\lambda_1 < 0$. Nilai λ_1 yaitu,

$$\lambda_1 = -\mu = -0,000017.$$

Karena $\lambda_1 < 0$ maka nilai $\lambda_1 = -0,000017$ memenuhi.

(iii.) $\lambda_2 < 0$. Nilai λ_2 yaitu,

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \frac{\beta\gamma}{\mu} - (\alpha + \delta + \mu), \\ &= \frac{1,804 \times 10^{-10}}{1,7 \times 10^{-5}} - 2,3 \times 10^{-3}, \\ &= 1,06 \times 10^{-5} - 2,3 \times 10^{-3}, \\ &= -0,0022.\end{aligned}$$

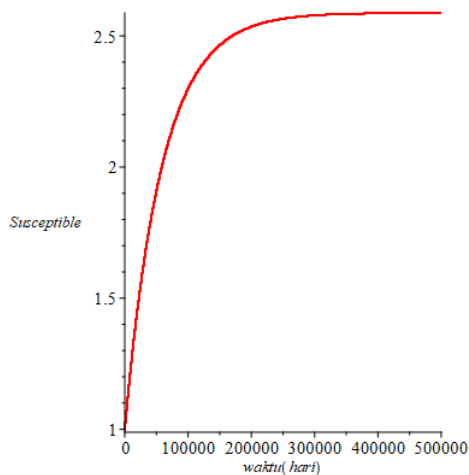
Karena $\lambda_2 < 0$ maka nilai $\lambda_2 = -0,0022$ memenuhi.

(iv.) $\lambda_3 < 0$. Nilai λ_3 yaitu,

$$\begin{aligned}\lambda &= -\mu - \omega, \\ &= -0,000017 - 0,0000034, \\ &= -2,04 \times 10^{-5}.\end{aligned}$$

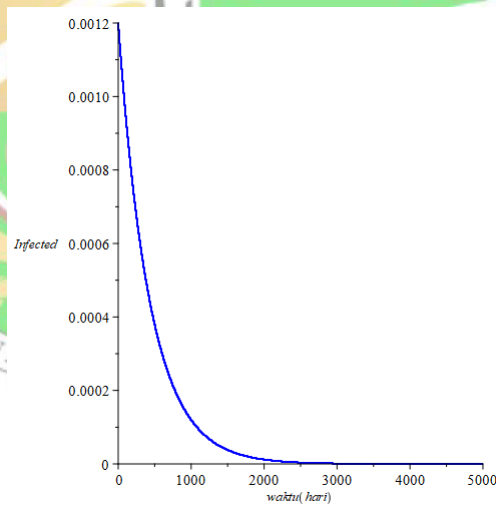
Karena $\lambda_3 < 0$ maka nilai $\lambda_3 = -2,04 \times 10^{-5}$ memenuhi.

Karena syarat (i), (ii), (iii), dan (iv) terpenuhi, maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik. Grafik solusi untuk sistem (3.4.1) dapat ditunjukkan pada tiga gambar berikut.



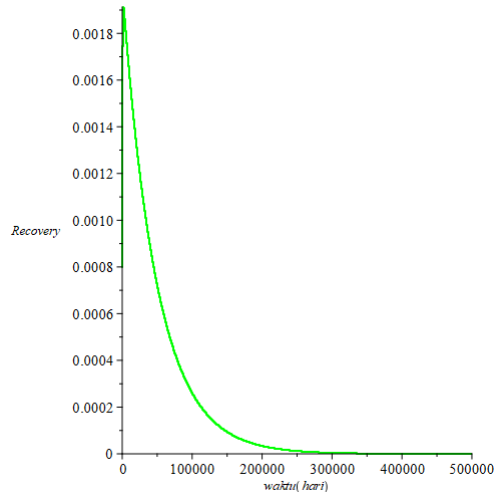
Gambar 3.4.1: Grafik Solusi Kelompok Rentan

Gambar 3.4.1 menunjukkan bahwa individu s akan meningkat dan menuju ke titik ekuilibrium bebas penyakit. Kenaikan tersebut disebabkan oleh besarnya laju kelahiran (γ).



Gambar 3.4.2: Grafik Solusi Kelompok Terinfeksi

Gambar 3.4.2 menunjukkan bahwa individu i akan menurun dan menuju ke titik ekuilibrium bebas penyakit. Kemudian seiring berjalannya waktu, individu i akan menghilang dari populasi.



Gambar 3.4.3: Grafik Solusi Kelompok Sembuh

Gambar 3.4.3 menunjukkan bahwa individu r akan menurun dan menuju ke titik ekuilibrium bebas penyakit. Kemudian seiring berjalannya waktu, individu r akan menghilang dari populasi.

Dengan mensubstitusikan nilai parameter pada Tabel 3.4.1 ke persamaan (3.2.11) diperoleh titik ekuilibrium endemik yaitu $E^* = (560, 97; -4, 975; -558, 75)$. Untuk menganalisis kestabilan titik ekuilibrium endemik dari sistem (3.1.1), substitusikan nilai parameter pada Tabel 3.4.1, sehingga diperoleh

(i.) $S > 0$. Nilai S yaitu,

$$\begin{aligned}
 S &= \beta(I^* - S^*) + \alpha + \delta + 3\mu + \omega, \\
 &= -0,0023 + 0,00229 + 0,00000032 + 5,1 \times 10^{-5} + 0,0000034, \\
 &= 4,466 \times 10^{-5}.
 \end{aligned}$$

Karena $S > 0$ maka nilai $S = 4,466 \times 10^{-5}$ memenuhi.

(ii.) $T > 0$. Nilai T yaitu,

$$\begin{aligned} T &= \beta I^*(\mu + \omega - 2\beta S^* + (\alpha + \delta + \mu)) - \beta S^*(2\mu + \omega) + (\alpha + \delta + \mu) \\ &\quad (2\mu + \omega) + \mu(\mu + \omega), \\ &= 4,63 \times 10^{-8} - 8,6 \times 10^{-8} + 8,602 \times 10^{-8} + 3,468 \times 10^{-10}, \\ &= 4,66 \times 10^{-8}. \end{aligned}$$

Karena $T > 0$ maka nilai $T = 4,66 \times 10^{-8}$ memenuhi.

(iii.) $P > 0$. Nilai P yaitu,

$$\begin{aligned} P &= \beta S^*(-\mu^2 - \mu\omega) + (\beta I^*(\mu + \omega) + \mu^2 + \mu\omega)(\alpha + \delta + \mu) - \omega\beta I^*\alpha, \\ &= 5,086 \times 10^{-13} - 1,488 \times 10^{-12} + 1,58 \times 10^{-13}, \\ &= -8,219 \times 10^{-13}. \end{aligned}$$

Karena $P > 0$ maka nilai $P = -8,219 \times 10^{-13}$ tidak memenuhi.

(iv.) $ST - P > 0$. Nilai $ST - P$ yaitu,

$$\begin{aligned} ST - P &= 4,466 \times 10^{-5}(4,66 \times 10^{-8}) - (-8,219 \times 10^{-13}), \\ &= 2,08 \times 10^{-12} + 8,219 \times 10^{-13}, \\ &= 2,901 \times 10^{-12}. \end{aligned}$$

Karena $ST - P > 0$ maka nilai $ST - P = 2,901 \times 10^{-12}$ memenuhi.

Karena syarat (iii) tidak terpenuhi, maka titik ekuilibrium endemik tidak stabil.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Pada penelitian ini dikonstruksi model modifikasi *SIR* penularan penyakit malaria di Indonesia. Model disajikan dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinier yaitu,

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \gamma - \beta SI - \mu S + \omega R, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - (\alpha + \delta + \mu)I, \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I - (\mu + \omega)R,\end{aligned}$$

dengan parameter $\gamma, \beta, \alpha, \omega, \delta, \mu$ berturut-turut adalah laju kelahiran, laju penularan penyakit malaria, laju individu yang sembuh kembali ke individu rentan, laju kematian akibat terinfeksi malaria, laju kematian alami, sedangkan variabel $S, I,$ dan R berturut-turut adalah jumlah populasi yang rentan terhadap penyakit malaria, jumlah populasi yang terinfeksi penyakit malaria, dan jumlah populasi yang sembuh dari penyakit malaria.

Berdasarkan analisis model, titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik jika:

- (i.) $R_0 < 1$.
- (ii.) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$.

sedangkan titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik jika:

- (i.) $R_0 > 1$.
- (ii.) $S, T, P > 0$.
- (iii.) $ST - P > 0$.

Kemudian dari hasil pengolahan data penularan penyakit malaria di Indonesia diperoleh nilai $R_0 = 0,0046$. Karena $R_0 < 1$ maka penyakit malaria di Indonesia tidak menyebar dan akhirnya akan hilang.

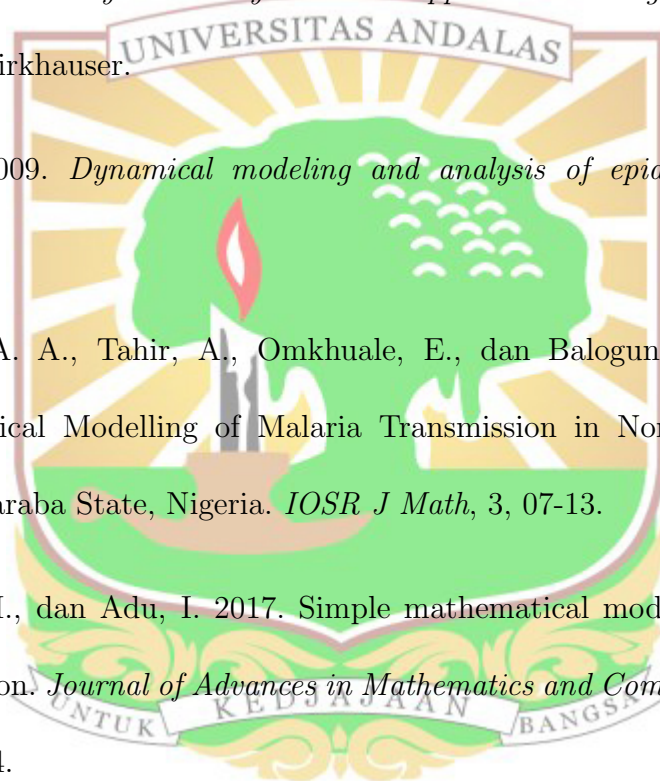


DAFTAR PUSTAKA

- [1] Affandi, P. 2018. Optimal control mathematical SIR model of malaria spread in South Kalimantan. In *Journal of Physics: Conference Series* Vol. 1116, No. 2, p. 022001. IOP Publishing.
- [2] Anonim. 2023. Malaria-Penyebab, Gejala, Pengobatan, dan Pencegahan. <https://www.siloamhospitals.com/informasi-siloam/artikel/apa-itu-malaria>, diakses pada 15 Maret 2023.
- [3] Anton, H., dan Rorres, C. 2013. *Elementary linear algebra: applications version*. John Wiley dan Sons.
- [4] Bastin, G. 2018. *Lectures on Mathematical Modeling of Biological Systems*.
- [5] Driessche, P dan Watmough, J. 2008. Further notes on the basic reproduction number. *Mathematical epidemiology*, 159-178.
- [6] Fisher, Stephen D. 1990. *Complex Variables Second Edition*. Dover Publications Inc, New York.
- [7] Kelley, W. G., dan Peterson, A. C. 2010. *The Theory of Differential Equations: Classical and Qualitative*. Springer Science and Business Media.
- [8] Kementerian Kesehatan Republik Indonesia. 2022. Data Kematian dengan Malaria Januari - Mei 2022

<https://p2pm.kemkes.go.id/publikasi/infografis/data-kematian-dengan-malaria-januari-mei-2022>, diakses pada 13 Mei 2023.

- [9] Kementerian Kesehatan Republik Indonesia. 2022. Info Malaria per September 2022 <https://p2pm.kemkes.go.id/publikasi/infografis/info-malaria-per-september-2022>, diakses pada 13 Mei 2023.
- [10] Lynch, S. 2007. *Dynamical System with Applications Using Mathematics*. Boston: Birkhauser.
- [11] Ma, Z. 2009. *Dynamical modeling and analysis of epidemics*. World Scientific.
- [12] Momoh, A. A., Tahir, A., Omkhuale, E., dan Balogun, O. S. 2012. Mathematical Modelling of Malaria Transmission in North Senatorial Zone of Taraba State, Nigeria. *IOSR J Math*, 3, 07-13.
- [13] Osman, M., dan Adu, I. 2017. Simple mathematical model for malaria transmission. *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science*, 25(6), 1-24.
- [14] Rizaty, Monavia Ayu. 2022. BPS: Jumlah Penduduk Indonesia Sebanyak 275,77 Juta pada 2022 <https://dataindonesia.id/ragam/detail/bps-jumlah-penduduk-indonesia-sebanyak-27577-juta-pada-2022>, diakses pada 13 Maret 2023.
- [15] Ross, S. 2021. Introduction to ordinary differential equations.



- [16] Sriporn, K., Tsai, C. F., Tsai, C. E., dan Wang, P. 2020. Analyzing Malaria Disease Using Effective Deep Learning Approach. *Diagnostics*, 10(10), 744.
- [17] Talapko, J., Skrlec, I., Alebi, T., Juki, M., dan Vev, A. 2019. Malaria: The Past and the Present. *Microorganism*, 7(6), 179.
- [18] Widi, Shilvina. 2023. Kasus Malaria Indonesia Melonjak pada 2022 <https://dataindonesia.id/kesehatan/detail/kasus-malaria-indonesia-melonjak-3629-pada-2022>, diakses pada 13 Maret 2023.



RIWAYAT HIDUP



Penulis bernama Sri Ayu Ningsih, lahir di Banjar Lawas Gadang pada tanggal 22 September 2000 dan merupakan anak dari pasangan Ayahanda Arlen dan Ibunda Enim. Penulis menyelesaikan Sekolah Dasar (SD) di SD Negeri 03 Banja Loweh pada tahun 2013,

Sekolah Menengah Pertama (SMP) di SMP Negeri 1 Payakumbuh pada tahun 2016, dan Sekolah Menengah Atas (SMA) di SMA Negeri 1 Payakumbuh pada tahun 2019. Pada tahun 2019, penulis diterima sebagai mahasiswa Departemen Matematika dan Sains Data Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Andalas melalui jalur Seleksi Mandiri Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SMMPN).

Selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika dan Sains Data FMIPA Universitas Andalas, penulis aktif dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) Universitas Andalas. Penulis pernah menjadi anggota bidang Kaderisasi pada kepengurusan HIMATIKA XXIV. Pada tahun 2022, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kenagarian Bukik Sikumpa, Kecamatan Lareh Sago Halaban, Kabupaten Lima Puluh Kota, Sumatera Barat. Kegiatan ini merupakan salah satu mata kuliah wajib dalam bentuk pengabdian masyarakat yang penulis ikuti.

Puji syukur atas izin Allah Yang Maha Kuasa, penulis dapat menyelesaikan studi di Universitas Andalas untuk meraih gelar Sarjana Sains (S.Si) pada tanggal 23 Agustus 2023.