BAB V

KESIMPULAN

Distribusi Gamma adalah distribusi peluang kontinu yang dinotasikan dengan peubah acak X dan parameter α, β serta memiliki fungsi kepadatan peluang sebagai berikut

$$f_X(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} exp(-x\beta) & , untuk\ 0 < x < \infty; \alpha > 0, \beta > 0 \\ 0 & , untuk\ x\ lainya. \end{cases} \tag{5.1}$$

Konvolusi adalah operasi penjumlahan dari peubah-peubah acak yang bersifat saling bebas. Dengan menggunakan konvolusi dapat ditentukan distribusi baru dari suatu peubah acak yang merupakan jumlah dari peubah-peubah acak dari distribusi sebelumnya. Misalkan didefinisikan penjumlahan peubah acak sebagai berikut

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \tag{5.2}$$

untuk semua peubah acak $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ yang berdistribusi Gamma
Peubah acak W yang berdistribusi Gamma dengan konstanta penstabil atau bisa dinotasikan $W \sim Gamma_{penstabil}(\alpha, \beta)$, didefinisikan sebagai suatu distribusi gamma dengan support $(0, \infty)$ diskala menjadi $(0, 1)$ sehingga membentuk fungsi kepadatan peluang baru, yaitu

$$f_W(w;\alpha,\beta) = \theta \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} w^{\alpha-1} exp(-w\beta) \tag{5.3}$$

untuk setiap $0 < w < 1$,$\alpha > 0$, dan $\beta > 0$ dimana

$$\theta = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha \int_0^1 w^{\alpha-1} e^{-w\beta} dw} \tag{5.4}$$

sebagai konstanta penstabil yang bergantung pada α dan β yang digunakan untuk mengendalikan fungsi kepadatan peluang Gamma.

Fungsi kepadatan peluang (fkp) dari konvolusi distribusi gamma yang dibangkitkan oleh konstanta penstabil dengan menggunakan parameter yang berbeda adalah

$$\begin{aligned} f_{S_n}(s_n) &= P s_n^{(\sum_{i=1}^n 2)-1} \\ &\times \int_0^1 ... \int_0^1 e^{-s_n p_{\beta_1,...,\beta_n(u_1,...,u_{n-1})}} B_{\alpha_1,...,\alpha_n}(u_1,...,u_{n-1})\ du_1,...,du_{n-1} \end{aligned}$$

$\forall\ s_n > 0\ dan\ f_{S_n}(s_n) = 0,\ \forall\ s_n \leq 0$, dimana

$$P = \frac{\prod_{i=1}^n \beta_i^2}{\prod_{i=1}^n [e_i^{\beta}(-\beta_i - 1) + 1]\Gamma(\sum_{i=1}^n 2)}, \tag{5.5}$$

dan

$$p_{\beta_1,...,\beta_n(u_1,...,u_{n-1})} := \beta_1 \prod_{j=1}^{n-1} u_j + \sum_{1=2}^{n-1} \beta_i(1-u_{i-1}) \prod_{j=i}^{n-1} u_j + \beta_n(1-u_{n-1}), \tag{5.6}$$

dan

$$B_{\alpha_1,...,\alpha_n(u_1,...,u_{n-1})} := \frac{1}{B_n(2,...,2)} \prod_{j=i}^{n-1} u_j^{\sum_{i=1}^n 2-1}(1-u_j) \tag{5.7}$$

Sedangkan(fkp) dari konvolusi distribusi gamma yang dibangkitkan oleh konstanta penstabil dengan menggunakan parameter yang sama adalah

$$f_{S_n} = (\frac{1}{e^{-\beta}(-\beta-1)+1})^n \frac{\beta^{\sum_{i=1}^n 2}}{\Gamma \sum_{i=1}^n 2} s_n^{(\sum_{i=1}^n 2)-1} e^{-\beta s_n} \tag{5.8}$$

Selanjutnya dari fungsi kepadatan peluang yang menggunakan konstanta penstabil dapat ditentukan beberapa sifat yaitu fungsi distribusi kumulatif, nilai harapan, variansi, serta fungsi pembangkit momen.