

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Analisis fungsional merupakan cabang dari analisis yang menggabungkan antara aljabar linier dan topologi. Pembahasan analisis fungsional meliputi ruang vektor berdimensi tak hingga dan pemetaan di antara ruang tersebut. Selain itu juga dibahas tentang konsep kekontinuan dan kekonvergenan pada ruang vektor. Objek-objek bahasan pada analisis fungsional meliputi ruang hasil kali dalam, ruang bernorm, ruang metrik, ruang topologi dan operator-operator linear kontinu pada ruang-ruang tersebut.

Suatu ruang bernorm adalah suatu ruang vektor yang dilengkapi dengan fungsi norm. Norm pada ruang vektor  $X$  merupakan fungsi yang mengasosiasikan suatu bilangan riil dengan vektor pada  $X$ , sehingga memenuhi sifat-sifat ruang bernorm.

Suatu ruang hasil kali dalam adalah suatu ruang vektor yang dilengkapi dengan fungsi hasil kali dalam. Hasil kali dalam pada ruang vektor  $X$  merupakan fungsi yang mengasosiasikan suatu lapangan skalar dari  $X$  dengan sepasang vektor pada  $X$ , sehingga memenuhi sifat-sifat ruang hasil kali dalam. Suatu ruang hasil kali dalam merupakan ruang bernorm, dengan norm yang diinduksi dari hasil kali dalamnya. Namun secara umum, ruang bernorm bukanlah ruang hasil

kali dalam.

Teori pada ruang hasil kali dalam merupakan teori yang paling banyak dikembangkan. Namun teori tersebut tidak berlaku secara umum pada ruang bernorm. Agar teori tersebut juga berlaku pada ruang bernorm, pada tahun 1961, Lumer [11] menggeneralisasi hasil kali dalam yang disebut sebagai semi hasil kali dalam Lumer. Semi hasil kali dalam Lumer pada ruang vektor  $X$  merupakan suatu fungsi yang mengasosiasikan suatu lapangan skalar dari  $X$  dengan sepasang vektor pada  $X$ , sehingga memenuhi sifat-sifat ruang semi hasil kali dalam Lumer.

Pada tahun yang sama, Lumer juga telah membuktikan bahwa suatu ruang semi hasil kali dalam Lumer adalah suatu ruang bernorm, dengan norm yang diinduksi dari semi hasil kali dalam Lumernya. Lumer juga telah membuktikan bahwa setiap ruang bernorm dapat dikonstruksi menjadi suatu ruang semi hasil kali Lumer dalam. Pada tahun 1967 Giles mengembangkan konsep ruang semi hasil kali dalam Lumer dengan menambahkan sifat homogenitas pada definisi ruang semi hasil kali dalam Lumer.

Konsep aljabar linear klasik mendefinisikan hasil kali dalam terbatas. Perluasan konsep ini menghasilkan hasil kali dalam tak terbatas. Hasil kali dalam tak terbatas pada ruang vektor  $X$  merupakan fungsi yang mengasosiasikan suatu lapangan skalar dari  $X$  dengan sepasang vektor pada  $X$ , sehingga memenuhi sifat-sifat ruang hasil kali dalam tak terbatas. Suatu ruang vektor yang dilengkapi dengan fungsi hasil kali dalam tak terbatas disebut ruang hasil kali dalam tak terbatas[6].

Penulis tertarik untuk mengkaji semi hasil kali dalam yang dibentuk oleh Lumer dan dikembangkan oleh Giles yang disebut sebagai semi hasil kali dalam Lumer-Giles atau disingkat dengan semi hasil kali dalam. Selanjutnya penulis juga akan mengkaji hasil kali dalam tak terbatas. Penggabungan semi hasil kali dalam dan hasil kali dalam tak terbatas yang didefinisikan sebagai semi hasil kali dalam tak terbatas juga akan dikaji pada penelitian ini. Ruang vektor yang dilengkapi dengan semi hasil kali dalam tak terbatas disebut sebagai ruang semi hasil kali dalam tak terbatas.

## 1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas maka perumusan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Bagaimana definisi suatu ruang semi hasil kali dalam?
2. Bagaimana definisi suatu ruang hasil kali dalam tak terbatas?
3. Bagaimana definisi suatu ruang semi hasil kali dalam tak terbatas dan mengkontruksi suatu semi hasil kali dalam tak terbatas pada suatu ruang bernorm kompleks?

## 1.3 Pembatasan Masalah

Pada penelitian ini pembahasan mengenai definisi ruang semi hasil kali dalam, ruang hasil kali dalam tak terbatas dan ruang semi hasil kali dalam tak terbatas pada ruang bernorm atas lapangan kompleks (ruang bernorm kompleks).

## 1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan perumusan dan batasan masalah diatas, maka tujuan penelitian ini yaitu :

1. Mengkaji definisi ruang semi hasil kali dalam pada suatu ruang bernorm kompleks beserta contoh.
2. Mengkaji definisi ruang semi hasil kali dalam tak terbatas pada suatu ruang bernorm kompleks beserta contoh.
3. Mengkaji definisi ruang semi hasil kali dalam tak terbatas dan mengkonstruksi suatu semi hasil kali dalam tak terbatas pada suatu ruang bernorm kompleks.

## 1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan skripsi ini dibagi menjadi empat bab. Bab I yaitu pendahuluan yang berisikan latar belakang dari penulisan tentang semi hasil kali dalam, hasil kali dalam tak terbatas dan semi hasil kali dalam tak terbatas, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian dan sistematika penulisan. Bab II yaitu landasan teori yang membahas mengenai ruang vektor, ruang bernorm, operator linear, fungsional linear, ruang dual, *normalized duality mapping*, hasil kali dalam, ruang hasil kali dalam terbatas positif, Bab III memuat pembahasan dari penelitian, dan Bab IV berisi kesimpulan dari pembahasan.