BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar merupakan salah satu bagian dari bidang matematika. Dalam aljabar abstrak dikenal adanya teori grup, yang membahas tentang grup. Secara umum grup adalah suatu himpunan yang dilengkapi dengan suatu operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma.

Dalam membicarakan struktur grup, diketahui banyak unsur dari suatu grup, yang dinamakan dengan orde. Suatu grup dikatakan grup hingga (finite) jika orde grupnya terhingga dan suatu grup dikatakan grup tak terhingga (infinite) jika orde grupnya tak terhingga.

Teorema Lagrange memiliki hubungan dengan orde dalam grup hingga. Teorema Lagrange menyatakan bahwa jika G suatu grup hingga dan H subgrup dari G, maka orde dari H harus membagi orde dari G. *Converse* teorema Lagrange dalam teorema Cauchy oleh Augustin Louis Cauchy [4] dan teorema Sylow oleh matematikawan Norwegia Ludwig Sylow pada tahun 1872 [2], jika suatu bialangan bulat positif v membagi orde dari grup hingga G, maka dijamin ada H subgrup dari G dengan orde v. Hal ini merupakan latar belakang yang membuat Penulis mengkaji lebih dalam tentang Teorema Sylow.

1.2 Perumusan Masalah

Misalkan G suatu grup dengan orde hingga, v suatu bilangan bulat positif dan v membagi orde dari G. Pada tugas akhir ini yang akan dibahas adalah apa syarat cukup agar G memuat subgrup dengan orde v.

1.3 Tujuan Penelitian

Penulisan tugas akhir ini bertujuan untuk menjelaskan syarat cukup agar grup G memuat subgrup dengan orde v untuk suatu bilangan bulat positif v dengan v membagi orde dari G.

1.4 Pembatasan Masalah

Penulisan tugas akhir ini dibatasi pada Teorema Sylow Pertama.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini terdiri dari empat bab, yaitu: BAB I Pendahuluan, memberikan gambaran singkat tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, pembatasan masalah, dan sistematika penulisan. BAB II Landasan Teori, memuat tentang teori-teori dasar yang digunakan sebagai acuan untuk membahas bab selanjutnya. BAB III Pembahasan, membahas tentang teorema Sylow. BAB IV Kesimpulan dari pembahasan.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan disajikan teori-teori dasar yang akan digunakan dalam mengkaji teorema Sylow.

2.1 Teori Himpunan

Definisi 2.1.1. [6] *Misalkan A dan B suatu himpunan. Himpunan A dan B saling lepas jika dan hanya jika $A \cap B = \varnothing$.*

Definisi 2.1.2. [3] *Misalkan A dan B suatu himpunan.*

1. *Perkalian kartesian $A \times B$ didefinisikan sebagai himpunan $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$.*
2. *Setiap subset dari $A \times B$ disebut sebagai relasi dari A ke B.*
3. *Relasi dari A ke A disebut sebagai relasi di A (pada A).*

Definisi 2.1.3. [1] *Misalkan A suatu himpunan dan $\sim$ suatu relasi pada A. Relasi $\sim$ disebut sebagai relasi ekuivalen pada A, jika:*

1. *Refleksi, jika setiap $a \in A$ berlaku $a \sim a$,*
2. *Simetri, jika setiap $a, b \in A$ dengan $a \sim b$ berlaku $b \sim a$,*
3. *Transitif, jika setiap $a, b, c \in A$ dengan $a \sim b$ dan $b \sim c$ berlaku $a \sim c$.*

Definisi 2.1.4. [3] *Misalkan X suatu himpunan yang tak kosong dan $\sim$ suatu relasi ekuivalen pada X. Untuk setiap $a \in X$, didefinisikan kelas ekuivalen dari a sebagai $cl(a) = \{x \in X \mid x \sim a\}$ yaitu kelas ekuivalen dari a yang memuat semua anggota X, yang terkait dengan a pada relasi $\sim$.*

Teorema 2.1.1. [3] *Misalkan X suatu himpunan yang tak kosong dan $\sim$ suatu relasi ekuivalen pada X, maka untuk setiap $a, b \in X$ berlaku:*

1. $cl(a) \neq \varnothing$,
2. *Berlaku hanya salah satu dari $cl(a) \cap cl(b) = \varnothing$ atau $cl(a) = cl(b)$ yaitu dua kelas ekuivalen yang berlaku hanya salah satu dari berikut sama atau tidak mempunyai elemen,*
3. $X = \bigcup_{a \in X} cl(a)$.

Bukti. Misalkan X suatu himpunan yang tak kosong, $\sim$ suatu relasi ekuivalen pada X dan $a, b \in X$. Oleh karena $\sim$ suatu relasi ekuivalen pada X, maka $\sim$ suatu relasi refleksi, simetri, dan transitif pada X.

1. Akan ditunjukkan $cl(a) \neq \varnothing$. Oleh karena $a \in X$ dan $\sim$ suatu relasi refleksi pada X, maka ada $a \sim a$. Ini berarti $a \in cl(a)$ sehingga $cl(a) \neq \varnothing$.

2. Akan ditunjukkan berlaku hanya salah satu dari $cl(a) \cap cl(b) = \varnothing$ atau $cl(a) = cl(b)$. Misalkan $cl(a) \cap cl(b) \neq \varnothing$. Akan ditunjukkan $cl(a) = cl(b)$, yaitu dengan menunjukkan:

   (a) $cl(a) \subseteq cl(b)$,

(b) $cl\,(b) \subseteq cl\,(a)$.

Oleh karena $cl\,(a) \cap cl\,(b) \neq \varnothing$, maka ada $y \in cl\,(a) \cap cl\,(b)$ yaitu $y \in cl\,(a)$ dan $y \in cl\,(b)$ sehingga $y \in X$, $y \sim a$, dan $y \sim b$. Selanjutnya, oleh karena $a, y \in X$, $y \sim a$, dan $\sim$ suatu relasi simetri pada X, maka $a \sim y$. Dengan demikian, oleh karena $a, b, y \in X$, $a \sim y$, $y \sim b$, dan $\sim$ suatu relasi transitif pada X, maka $a \sim b$.

(a) Akan ditunjukkan $cl\,(a) \subseteq cl\,(b)$. Ambil sebarang $x \in cl\,(a)$, akan ditunjukkan $x \in cl\,(b)$. Oleh karena $x \in cl\,(a)$, maka $x \in X$ dan $x \sim a$. Selanjutnya, oleh karena $a, b, x \in X$, $x \sim a$, $a \sim b$, dan $\sim$ suatu relasi transitif pada X, maka $x \sim b$. Ini berarti $x \in cl\,(b)$ sehingga $cl\,(a) \subseteq cl\,(b)$.

(b) Akan ditunjukkan $cl\,(b) \subseteq cl\,(a)$. Ambil sebarang $x \in cl\,(b)$, akan ditunjukkan $x \in cl\,(a)$. Oleh karena $x \in cl\,(b)$, maka $x \in X$ dan $x \sim b$. Oleh karena $a, b \in X$, $a \sim b$, dan $\sim$ suatu relasi simetri pada X, maka $b \sim a$. Selanjutnya, oleh karena $a, b, x \in X$, $x \sim b$, $b \sim a$, dan $\sim$ suatu relasi transitif pada X, maka $x \sim a$. Ini berarti $x \in cl\,(a)$ sehingga $cl\,(b) \subseteq cl\,(a)$.

Oleh karena (a) dan (b), maka $cl\,(b) = cl\,(a)$.

3. Akan ditunjukkan $X = \bigcup_{a \in X} cl\,(a)$, yaitu dengan menunjukkan:

(a) $X \subseteq \bigcup_{a \in X} cl\,(a)$,

(b) $\bigcup_{a \in X} cl\,(a) \subseteq X$.

(a) Akan ditunjukkan $X \subseteq \bigcup_{a \in X} cl\,(a)$. Ambil sebarang $x \in X$, akan ditunjukkan $x \in \bigcup_{a \in X} cl\,(a)$. Oleh karena $x \in X$ dan $\sim$ suatu relasi refleksi pada X, maka $x \sim x$. Ini berarti $x \in cl\,(x)$. Oleh karena $x \in cl\,(x)$ dan $cl\,(x) \subseteq \bigcup_{a \in X} cl\,(a)$, maka $x \in \bigcup_{a \in X} cl\,(a)$. Akibatnya, $X \subseteq \bigcup_{a \in X} cl\,(a)$.

(b) Akan ditunjukkan $\bigcup_{a \in X} cl\,(a) \subseteq X$. Ambil sebarang $t \in \bigcup_{a \in X} cl\,(a)$, akan ditunjukkan $t \in X$. Oleh karena $t \in \bigcup_{a \in X} cl\,(a)$, maka $t \in cl\,(x)$ untuk suatu $x \in X$. Oleh karena $t \in cl\,(x)$, maka $t \in X$ dan $t \sim x$. Akibatnya, $\bigcup_{a \in X} cl\,(a) \subseteq X$.

Oleh karena (a) dan (b), maka $X = \bigcup_{a \in X} cl\,(a)$.

□

Definisi 2.1.5. [3] *Misalkan X suatu himpunan yang tidak kosong. Himpunan K adalah himpunan dari subset$-$subset yang tak kosong dari X sedemikian sehingga setiap dua anggota dari K yang berbeda saling lepas, maka K disebut sebagai partisi dari X, jika X sama dengan hasil gabungan atau union dari semua anggota K.*

Akibat 2.1.1. [3] *Misalkan X suatu himpunan yang tak kosong dengan suatu relasi ekuivalen yang didefinisikan pada X, maka himpunan semua kelas-kelas ekuivalen di X merupakan partisi dari X.*

Bukti. Misalkan X suatu himpunan yang tak kosong dengan suatu relasi ekuivalen yang didefinisikan pada X. Beradasarkan Definisi 2.1.5 dan Teorema 2.1.1, maka diperoleh bahwa himpunan semua kelas-kelas ekuivalen di X merupakan partisi dari X. $\square$

2.2 Pemetaan

Definisi 2.2.1. [3] *Misalkan A dan B suatu himpunan yang tak kosong. Relasi f dari A ke B disebut sebagai pemetaan atau fungsi f dari A ke B dan ditulis sebagai $f : A \longrightarrow B$ adalah aturan yang setiap $a \in A$ tepat satu dengan $b \in B$ sedemikin sehingga $(a, b) \in f$ (b disebut sebagai peta atau image dari a pada f yang ditulis sebagai $b = f(a)$ dan a disebut sebagai prapeta atau pre-image dari b pada f). Himpunan A disebut sebagai domain dari f dan B disebut sebagai kodomain dari f. Subset dari B yang memuat hanya anggota-anggota dari B yang mempunyai pre-image di A disebut sebagai range dari f.*

Definisi 2.2.2. [5] *Misalkan A dan B suatu himpunan.*

1. *Pemetaan $f : A \longrightarrow B$ dikatakan pemetaan satu-satu atau pemetaan injektif jika setiap $a_1, a_2 \in A$ dengan $f(a_1) = f(a_2)$, maka $a_1 = a_2$ (atau jika setiap $a_1, a_2 \in A$ dengan $a_1 \neq a_2$, maka $f(a_1) \neq f(a_2)$).*

2. *Pemetaan $f : A \longrightarrow B$ dikatakan pemetaan pada atau pemetaan surjektif jika untuk setiap $b \in B$, terdapat $a \in A$ sedemikian sehingga $f(a) = b$.*

2.3 Bilangan Bulat

Definisi 2.3.1. [3] *Misalkan* a *suatu bilangan bulat tak nol. Bilangan* a *dikatakan membagi bilangan bulat* b *ditulis sebagai* $a \mid b$*, jika* $b = a\ c$ *untuk suatu bilangan bulat* c.

Definisi 2.3.2. [3] *Misalkan* p *suatu bilangan bulat dan* $p > 1$*. Bilangan* p *disebut sebagai bilangan prima jika hanya* 1 *dan* p *yang membagi* p.

2.4 Grup

Definisi 2.4.1. [6] *Misalkan* G *suatu himpunan yang tak kosong. Pemetaan dari* $G \times G$ *ke* G *disebut operasi biner pada* G.

Definisi 2.4.2. [1] *Misalkan* G *suatu himpunan tak kosong dan* $*$ *suatu operasi biner yang didefinisikan di* G*. Unsur-unsur di* G *dikatakan membentuk grup terhadap operasi* $*$ *jika memenuhi:*

1. *Untuk setiap* $a, b \in G$ *berlaku* $a * b \in G$ *(*G *bersifat tertutup terhadap operasi* $*$*),*
2. *Untuk setiap* $a, b, c \in G$ *berlaku* $a*(b*c) = (a*b)*c$ *(*G *bersifat asosiatif terhadap operasi* $*$*),*
3. *Terdapat suatu unsur di* G *yang dilambangkan dengan* e *sehingga untuk setiap* $a \in G$ *berlaku* $a * e = e * a = a$ *(*G *memiliki unsur identitas terhadap operasi* $*$*),*

4. *Untuk setiap $a \in G$, ada suatu unsur di G yang dilambangkan dengan a^{-1} sehingga berlaku $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (setiap unsur di G mempunyai invers terhadap operasi $*$).*

Catatan:

1. *Untuk selanjutnya $a * b$ ditulis sebagai $a\ b$.*

2. *Jika setiap unsur di G membentuk grup terhadap operasi biner di G, maka G suatu grup.*

Contoh 2.4.1. Himpunan $Z_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ suatu himpunan bilangan bulat modulo 6. Didefinisikan penjumlahan modulo 6 ($+_6$) di Z_6 sebagai berikut $\overline{a} +_6 \overline{b} = \overline{c}$ dimana c adalah sisa dari $a + b$ setelah dibagi 6.

Tabel 2.4.1: Penjumlahan modulo 6 ($+_6$) di Z_6

$+_6$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$

1. Dari tabel di atas dapat dilihat bahwa setiap $\overline{a}, \overline{b} \in Z_6$ berlaku $\overline{a} +_6 \overline{b} \in Z_6$.

2. Dengan menggunakan tabel di atas dapat ditunjukkan bahwa setiap $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in Z_6$ berlaku $\overline{a} +_6 (\overline{b} +_6 \overline{c}) = (\overline{a} +_6 \overline{b}) +_6 \overline{c}$.

3. Dari tabel di atas dapat dilihat bahwa $\overline{0}$ merupakan unsur identitas di Z_6.

4. Dari tabel di atas diperoleh:

   Invers dari $\overline{0}$ adalah $\overline{0}$.

   Invers dari $\overline{1}$ adalah $\overline{5}$.

   Invers dari $\overline{2}$ adalah $\overline{4}$.

   Invers dari $\overline{3}$ adalah $\overline{3}$.

   Invers dari $\overline{4}$ adalah $\overline{2}$.

   Invers dari $\overline{5}$ adalah $\overline{1}$.

Oleh karena (1), (2), (3), dan (4), maka Z_6 membentuk grup terhadap operasi $+_6$.

Definisi 2.4.3. [3] *Misalkan G suatu grup. Banyaknya unsur pada grup G disebut orde dari G dan dinotasikan sebagai $o(G)$ atau $|G|$.*

Lemma 2.4.1. [3] *Misalkan G suatu grup, maka:*

1. *Elemen identitas di G tunggal,*

2. *Invers dari setiap $a \in G$ tunggal,*

3. $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$ *untuk setiap* $a \in G$, *dimana* a^{-1} *merupakan invers dari* a *di* G,

4. $(a\ b)^{-1} = b^{-1}\ a^{-1}$ *untuk setiap* $a, b \in G$,

5. (a) *Jika* $a\ b = a\ c$, *maka* $b = c$ *untuk setiap* $a, b, c \in G$,

   (b) *Jika* $b\ a = c\ a$, *maka* $b = c$ *untuk setiap* $a, b, c \in G$.

Bukti. Misalkan G suatu grup.

1. Akan ditunjukkan elemen identitas di G tunggal. Misalkan e *dan* f adalah unsur identitas di G, akan ditunjukkan $e = f$. Pandang e suatu unsur identitas, $f \in G$, dan G suatu grup, maka $e\ f = f\ e = f$. Selanjutnya, pandang f suatu unsur identitas, $e \in G$, dan G suatu grup, maka $f\ e = e\ f = e$. Oleh karena $e\ f = f\ e = f$ dan $f\ e = e\ f = e$, maka $e = f$. Ini berarti elemen identitas di G tunggal.

2. Akan ditunjukkan invers dari setiap $a \in G$ tunggal. Misalkan x *dan* y adalah invers dari a di G, akan ditunjukkan $x = y$. Oleh karena x invers dari $a \in G$ dan G suatu grup, maka $a\ x = x\ a = e$. Kemudian, oleh karena y invers dari $a \in G$ dan G suatu grup, maka $a\ y = y\ a = e$. Oleh karena x *dan* y adalah invers dari a di G, maka $x, y \in G$. Oleh karena G suatu grup, maka ada unsur identitas di G yaitu e sedemikian sehingga untuk setiap $g \in G$ berlaku $g\ e = e\ g = g$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} x &= e\ x \\ &= (y\ a)\ x \\ &= y\ (a\ x) \\ &= y\ e \\ &= y \end{aligned}$$

   Ini berarti invers dari a di G tunggal.

3. Akan ditunjukkan $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$ untuk setiap $a \in G$, dimana a^{-1} merupakan invers dari a. Ambil $a \in G$. Akan ditunjukkan $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$,

yaitu dengan menunjukkan invers dari a^{-1} adalah a. Oleh karena G suatu grup, maka ada unsur identitas di G yaitu e sedemikian sehingga untuk setiap $g \in G$ berlaku $g\ e = e\ g = g$. Oleh karena $a \in G$ dan G suatu grup, maka a mempunyai invers yaitu a^{-1} di G sedemikian sehingga $a\ a^{-1} = a^{-1}\ a = e$. Ini berarti invers dari a^{-1} adalah a sehingga $(a^{-1})^{-1} = a$.

4. Akan ditunjukkan $(a\ b)^{-1} = b^{-1}\ a^{-1}$ untuk setiap $a, b \in G$. Ambil $a, b \in G$. Akan ditunjukkan $(a\ b)^{-1} = b^{-1}\ a^{-1}$, yaitu dengan menunjukkan invers dari $a\ b$ adalah $b^{-1}\ a^{-1}$. Oleh karena G suatu grup, maka ada unsur identitas di G yaitu e sedemikian sehingga untuk setiap $g \in G$ berlaku $g\ e = e\ g = g$. Oleh karena $a \in G$ dan G suatu grup, maka a mempunyai invers yaitu a^{-1} di G sedemikian sehingga $a\ a^{-1} = a^{-1}\ a = e$. Oleh karena $b \in G$ dan G suatu grup, maka b mempunyai invers yaitu b^{-1} di G sedemikian sehingga $b\ b^{-1} = b^{-1}\ b = e$.

   (a) Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}(a\ b)\ (b^{-1}\ a^{-1}) &= a\ (b\ (b^{-1}\ a^{-1}))\\ &= a\ ((b\ b^{-1})\ a^{-1})\\ &= a\ (e\ a^{-1})\\ &= a\ a^{-1}\\ &= e\end{aligned}$$

(b) Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}\left(b^{-1}\ a^{-1}\right)\ (a\ b) &= b^{-1}\ \left(a^{-1}\ (a\ b)\right)\\ &= b^{-1}\ \left(\left(a^{-1}\ a\right)\ b\right)\\ &= b^{-1}\ (e\ b)\\ &= b^{-1}\ b\\ &= e\end{aligned}$$

Dari (a) dan (b) diperoleh $(a\ b)\ \left(b^{-1}\ a^{-1}\right) = \left(b^{-1}\ a^{-1}\right)\ (a\ b) = e$. Ini berarti invers dari $a\ b$ adalah $b^{-1}\ a^{-1}$ sehingga $(a\ b)^{-1} = b^{-1}\ a^{-1}$.

5. (a) Akan ditunjukkan jika $a\ b = a\ c$, maka $b = c$ untuk setiap $a, b, c \in G$. Misalkan $a, b, c \in G$ dan $a\ b = a\ c$, akan ditunjukkan $b = c$. Oleh karena G suatu grup, maka ada unsur identitas di G yaitu e sedemikian sehingga untuk setiap $g \in G$ berlaku $g\ e = e\ g = g$. Oleh karena $a \in G$ dan G suatu grup, maka a mempunyai invers yaitu a^{-1} di G sedemikian sehingga $a\ a^{-1} = a^{-1}\ a = e$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}a\ b &= a\ c\\ a^{-1}\ (a\ b) &= a^{-1}\ (a\ c)\\ \left(a^{-1}\ a\right)\ b &= \left(a^{-1}\ a\right)\ c\\ e\ b &= e\ c\\ b &= c\end{aligned}$$

Jadi, jika $a\ b = a\ c$, maka $b = c$.

(b) Akan ditunjukkan jika $b\ a = c\ a$, maka $b = c$ untuk setiap $a, b, c \in G$. Misalkan $a, b, c \in G$ dan $b\ a = c\ a$, akan ditunjukkan $b = c$. Oleh karena G suatu grup, maka ada unsur identitas di G yaitu e sedemikian sehingga untuk setiap $g \in G$ berlaku $g\ e = e\ g = g$. Oleh karena $a \in G$ dan G suatu grup, maka a mempunyai invers yaitu a^{-1} di G sedemikian sehingga $a\ a^{-1} = a^{-1}\ a = e$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} b\,a &= c\,a \\ (b\ a)\ a^{-1} &= (c\ a)\ a^{-1} \\ b\ \left(a\ a^{-1}\right) &= c\ \left(a\ a^{-1}\right) \\ b\,e &= c\,e \\ b &= c \end{aligned}$$

Jadi, jika $b\ a = c\ a$, maka $b = c$.

$\square$

2.5 Subgrup

Definisi 2.5.1. [3] *Misalkan G suatu grup dan H subset yang tak kosong dari G. Himpunan H disebut subgrup dari G jika H membentuk grup terhadap operasi biner di G.*

Teorema 2.5.1. [6] *Misalkan G suatu grup dan H subgrup dari G. Unsur identitas di H sama dengan unsur identitas di G.*

Bukti. Misalkan G suatu grup dengan unsur identitas e dan H subgrup dari G dengan unsur identitas e', akan ditunjukkan $e = e'$. Ambil sebarang $a \in H$. Oleh karena $a \in H$, H subgrup dari G, dan G suatu grup maka $a \in G$. Oleh karena $a \in H$, e' unsur identitas di H, H subgrup dari G, dan G suatu grup maka $a\ e' = e'\ a = a$. Oleh karena $a \in G$ dan $a\ e' = e'\ a = a$ maka $a\ e' \in G$ dan $e'\ a \in G$. Selanjutnya, oleh karena $a \in G$, e unsur identitas di G, dan G suatu grup maka $a\ e = e\ a = a$. Oleh karena $a \in G$ dan G suatu grup maka a mempunyai invers di G yaitu a^{-1} sedemikian sehingga $a\ a^{-1} = a^{-1}\ a = e$. Perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
a &= a \\
a\ e &= a\ e' \\
a^{-1}\ (a\ e) &= a^{-1}\ (a\ e') \\
(a^{-1}\ a)\ e &= (a^{-1}\ a)\ e' \\
e\ e &= e\ e' \\
e &= e'
\end{aligned}
$$

□

Teorema 2.5.2. [3] *Misalkan G suatu grup dan H subset yang tak kosong dari G. Himpunan H disebut subgrup dari G jika dan hanya jika*

1. *Untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $a\ b \in H$,*
2. *Untuk setiap $a \in H$ berlaku $a^{-1} \in H$.*

Bukti. Misalkan G suatu grup dan H subset yang tak kosong dari G.

($\Rightarrow$) Oleh karena H subgrup dari G, maka berdasarkan Definisi 2.5.1 diperoleh

H membentuk grup terhadap operasi biner di G sehingga berdasarkan Definisi 2.4.2 terpenuhi:

1. Untuk Setiap $a, b \in H$ berlaku $a\ b \in H$ (H bersifat tertutup terhadap operasi biner di G),
2. Untuk Setiap $a, b, c \in H$ berlaku $a\ (b\ c) = (a\ b)\ c$ (H bersifat asosiatif terhadap operasi biner di G),
3. Terdapat suatu unsur di H yang dilambangkan dengan e sehingga untuk setiap $a \in H$ berlaku $a\ e = e\ a = a$ (H memiliki unsur identitas terhadap operasi biner di G),
4. Untuk setiap $a \in H$, ada suatu unsur di H yang dilambangkan dengan a^{-1} sehingga berlaku $a\ a^{-1} = a^{-1}\ a = e$ (Setiap unsur di H mempunyai invers terhadap operasi biner di G).

($\Leftarrow$) Misalkan himpunan H memenuhi:

1. Untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $a\ b \in H$,
2. Untuk setiap $a \in H$ berlaku $a^{-1} \in H$.

Akan ditunjukkan H subgrup dari G.

3. Ambil sebarang $a, b, c \in H$, akan ditunjukkan $a\,(b\ c) = (a\ b)\ c$. Oleh karena $a, b, c \in H$ dan H subset tak kosong dari G, maka $a, b, c \in G$. Oleh karena $a, b, c \in G$ dan G suatu grup, maka $a\,(b\ c) = (a\ b)\ c$.

4. Akan ditunjukkan terdapat unsur identitas di H. Dari (2) diperoleh $a, a^{-1} \in H$, maka dari (1) diperoleh $a\,a^{-1} \in H$ sehingga $a\,a^{-1} = e \in H$. Jadi, ada e unsur identitas di H.

Oleh karena (1), (2), (3), dan (4), maka H subgrup dari G. $\square$

Contoh 2.5.2. Himpunan $Z_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ suatu himpunan bilangan bulat modulo 6. Didefinisikan penjumlahan modulo 6 $(+_6)$ di Z_6 sebagai berikut $\overline{a} +_6 \overline{b} = \overline{c}$ dimana c adalah sisa dari $a + b$ setelah dibagi 6. Himpunan Z_6 suatu grup. Himpunan $H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$.

Tabel 2.5.2: Penjumlahan modulo 6 $(+_6)$ di H

$+_6$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$

1. $H \neq \varnothing$.

2. $H \subset Z_6$.

3. (a) Dari tabel di atas dapat dilihat bahwa setiap $\overline{a}, \overline{b} \in H$ berlaku $\overline{a} +_6 \overline{b} \in H$.

   (b) Dari tabel di atas diperoleh:

   Invers dari $\overline{0}$ adalah $\overline{0}$.

   Invers dari $\overline{3}$ adalah $\overline{3}$.

Oleh karena (1), (2), dan (3), maka H subgrup dari Z_6 terhadap operasi $+_6$.

Definisi 2.5.2. [3] *Misalkan G suatu grup dan H subgrup dari G. Untuk setiap $a, b \in G$, a dikatakan kongruen dengan b mod H ditulis sebagai $a \cong b$ mod H jika $a\ b^{-1} \in H$.*

Teorema 2.5.3. [3] *Misalkan G suatu grup, H subgrup dari G, dan $a, b \in G$. Didefinisikan relasi kongruen modulo H sebagai berikut $a \cong b$ mod H jika $a\ b^{-1} \in H$. Relasi kongruen modulo H adalah suatu relasi ekuivalen di G.*

Bukti. Misalkan G suatu grup, H subgrup dari G, dan $a, b \in G$. Didefinisikan relasi kongruen modulo H sebagai berikut $a \cong b$ *mod* H jika $a\ b^{-1} \in H$. Akan ditunjukkan relasi kongruen modulo H suatu relasi ekuivalen di G.

1. Ambil $a \in G$, akan ditunjukkan $a \cong a$ *mod* H. Oleh karena H subgrup dari G dan G suatu grup, maka ada unsur identitas di H yaitu e sedemikian sehingga untuk setiap $h \in H$ berlaku $h\ e = e\ h = h$. Oleh karena e unsur identitas di H, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka e unsur identitas di G sedemikian sehingga untuk setiap $g \in G$ berlaku $g\ e = e\ g = g$. Oleh karena $a \in G$ dan G suatu grup, maka a mempunyai invers di G yaitu a^{-1} sedemikian sehingga $a\ a^{-1} = a^{-1}\ a = e$. Ini berarti $a\ a^{-1} \in H$ sehingga $a \cong a$ *mod* H.

2. Ambil $a, b \in G$ dengan $a \cong b$ *mod* H, akan ditunjukkan $b \cong a$ *mod* H. Oleh karena $a \cong b$ *mod* H, maka $a\ b^{-1} \in H$. Selanjutnya, oleh karena $a\ b^{-1} \in H$, H subgrup dari G dan G suatu grup, maka $a\ b^{-1}$ mempunyai invers di H yaitu $b\ a^{-1}$ sedemikian sehingga $\left(a\ b^{-1}\right)\ \left(b\ a^{-1}\right) = \left(b\ a^{-1}\right)\ \left(a\ b^{-1}\right) = e$. Ini berarti $b\ a^{-1} \in H$ sehingga $b \cong a$ *mod* H.

3. Ambil $a, b, c \in G$ dengan $a \cong b \ mod \ H$ dan $b \cong c \ mod \ H$, akan ditunjukkan $a \cong c \ mod \ H$. Oleh karena $a \cong b \ mod \ H$ dan $b \cong c \ mod \ H$, maka $a\, b^{-1} \in H$ dan $b\, c^{-1} \in H$. Oleh karena $a\, b^{-1} \in H$, $b\, c^{-1} \in H$, H subgrup dari G dan G suatu grup, maka $\left(a\, b^{-1}\right) \ \left(b\, c^{-1}\right) \in H$. Oleh karena $\left(a\, b^{-1}\right) \ \left(b\, c^{-1}\right) \in H$, H subgrup dari G dan G suatu grup, maka $\left(a\, b^{-1}\right) \ \left(b\, c^{-1}\right) \in G$. Oleh karena G suatu grup, maka ada unsur identitas di G yaitu e sedemikian sehingga untuk setiap $g \in G$ berlaku $g\, e = e\, g = g$. Oleh karena $b \in G$ dan G suatu grup, maka a mempunyai invers di G yaitu b^{-1} sedemikian sehingga $b\, b^{-1} = b^{-1}\, b = e$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} \left(a\, b^{-1}\right) \ \left(b\, c^{-1}\right) &= \left(\left(a\, b^{-1}\right) \ b\right) \ c^{-1} \\ &= \left(a \ \left(b^{-1}\, b\right)\right) \ c^{-1} \\ &= (a \ (e)) \ c^{-1} \\ &= a\, c^{-1} \end{aligned}$$

Ini berarti $a\, c^{-1} \in H$ sehingga $a \cong c \ mod \ H$.

Oleh karena (1), (2), dan (3), maka relasi kongruen modulo H suatu relasi ekuivalen di G. □

Definisi 2.5.3. [3] *Misalkan G suatu grup dan H subgrup dari G dan relasi kongruen modulo H suatu relasi ekuivalen pada G. Untuk setiap $a \in G$ didefinisikan kelas ekuivalen dari a sebagai himpunan*

$$cl\,(a) = \{x \in G \mid x \cong a \ mod \ H\}\,.$$

Definisi 2.5.4. [3] *Misalkan G suatu grup, H subgrup dari G, dan $a \in G$.*

1. *Himpunan* $Ha = \{h\ a \mid h \in H\}$ *disebut koset kanan dari* H *di* G.

2. *Himpunan* $aH = \{a\ h \mid h \in H\}$ *disebut koset kiri dari* H *di* G.

Contoh 2.5.3. Himpunan $Z_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ suatu himpunan bilangan bulat modulo 6. Didefinisikan penjumlahan modulo 6 $(+_6)$ di Z_6 sebagai berikut $\overline{a} +_6 \overline{b} = \overline{c}$ dimana c adalah sisa dari $a\ +\ b$ setelah dibagi 6. Himpunan Z_6 suatu grup. Himpunan $H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$ subgrup dari Z_6.

Koset-koset kiri dari H di Z_6 adalah

$$\begin{aligned} \overline{0} +_6 H &= \overline{3} +_6 H = \{\overline{0}, \overline{3}\} \\ \overline{1} +_6 H &= \overline{4} +_6 H = \{\overline{1}, \overline{4}\} \\ \overline{2} +_6 H &= \overline{5} +_6 H = \{\overline{2}, \overline{5}\} \end{aligned}$$

Koset-koset kanan dari H di Z_6 adalah

$$\begin{aligned} H +_6 \overline{0} &= H +_6 \overline{3} = \{\overline{0}, \overline{3}\} \\ H +_6 \overline{1} &= H +_6 \overline{4} = \{\overline{1}, \overline{4}\} \\ H +_6 \overline{2} &= H +_6 \overline{5} = \{\overline{2}, \overline{5}\} \end{aligned}$$

Teorema 2.5.4. [3] *Misalkan* G *suatu grup,* H *subgrup dari* G*, dan* $a \in G$*, maka* $Ha = \{x \in G \mid x \cong a \ mod\ H\} = cl\,(a)$.

Bukti. Misalkan G suatu grup, H subgrup dari G, dan $a \in G$. Akan ditunjukkan $Ha = \{x \in G \mid x \cong a \ mod\ H\} = cl\,(a)$, yaitu dengan menunjukkan:

1. $Ha \subseteq cl\,(a)$,

2. $cl\,(a) \subseteq Ha$.

1. Akan ditunjukkan $Ha \subseteq cl\,(a)$. Ambil $x \in Ha$, akan ditunjukkan $x \in cl\,(a)$. Oleh karena $x \in Ha$, maka $x = h\ a$ untuk suatu $h \in H$. Oleh karena $h \in H$, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka $h \in G$. Oleh karena $h, a \in G$ dan G suatu grup, maka $h\ a \in G$. Oleh karena $x = h\ a$ dan $h\ a \in G$ maka $x \in G$. Oleh karena G suatu grup, maka ada unsur identitas di G yaitu e sedemikian sehingga untuk setiap $g \in G$ berlaku $g\ e = e\ g = g$. Oleh karena $a \in G$ dan G suatu grup, maka a mempunyai invers di G yaitu a^{-1} sedemikia sehingga $a\ a^{-1} = a^{-1}\ a = e$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} x &= h\ a \\ x\ a^{-1} &= (\ h\ a)\ a^{-1} \\ x\ a^{-1} &= h\ \left(a\ a^{-1}\right) \\ x\ a^{-1} &= h\ e \\ x\ a^{-1} &= h \end{aligned}$$

Ini berarti $x\ a^{-1} \in H$ sehingga $x \cong a\ mod\ H$. Akibatya, $x \in cl\,(a)$. Jadi, untuk setiap $x \in Ha$ diperoleh $x \in cl\,(a)$ sehingga $Ha \subseteq cl\,(a)$.

2. Akan ditunjukkan $cl\,(a) \subseteq Ha$. Ambil $x \in cl\,(a)$, akan ditunjukkan $x \in Ha$. Oleh karena $x \in cl\,(a)$, maka $x \in G$ dan $x \cong a\ mod\ H$. Oleh karena $x \cong a\ mod\ H$, maka $x\ a^{-1} \in H$. Oleh karena $x\ a^{-1} \in H$, maka $x\ a^{-1} = h$ untuk suatu $h \in H$. Oleh karena $h \in H$, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka $h \in G$. Oleh karena $x\ a^{-1} = h$ dan $h \in G$ maka $x\ a^{-1} \in G$. Oleh karena G suatu grup, maka ada unsur identitas di G

yaitu e sedemikian sehingga untuk setiap $g \in G$ berlaku $g\ e = e\ g = g$. Oleh karena $a \in G$ dan G suatu grup, maka a mempunyai invers di G yaitu a^{-1} sedemikia sehingga $a\ a^{-1} = a^{-1}\ a = e$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} x\ a^{-1} &= h \\ \left(x\ a^{-1}\right)\ a &= h\ a \\ x\ \left(a^{-1}\ a\right) &= h\ a \\ x\ e &= h\ a \\ x &= h\ a \end{aligned}$$

Ini berarti $x \in Ha$. Jadi, untuk setiap $x \in cl\,(a)$ diperoleh $x \in Ha$ sehingga $cl\,(a) \subseteq Ha$.

Oleh karena (1) dan (2), maka $Ha = \{x \in G \mid x \cong a \ mod\ H\} = cl\,(a)$. □

Akibat 2.5.1. [3] *Misalkan G suatu grup dan H subgrup dari G, maka untuk setiap $a, b \in G$ berlaku:*

1. *$Ha \neq \varnothing$,*

2. *Berlaku hanya salah satu dari $Ha \cap Hb = \varnothing$ atau $Ha = Hb$ yaitu dua kelas ekuivalen yang berlaku hanya salah satu dari berikut sama atau tidak mempunyai elemen,*

3. *$G = \bigcup\limits_{a \in G} Ha$.*

Bukti. Misalkan G suatu grup dan H subgrup dari G. Berdasarkan Teorema 2.1.1 dan Teorema 2.5.4, maka diperoleh untuk setiap $a, b \in G$ berlaku:

1. $Ha \neq \varnothing$,

2. Berlaku hanya salah satu dari $Ha \cap Hb = \varnothing$ atau $Ha = Hb$ yaitu dua kelas ekuivalen yang berlaku hanya salah satu dari berikut sama atau tidak mempunyai elemen,

3. $G = \bigcup_{a \in G} Ha$.

$\square$

Lemma 2.5.2. [1] *Misalkan G suatu grup dan H subgrup dari G. Terdapat korespondensi satu-satu antara setiap dua buah koset kanan dari H di G.*

Bukti. Misalkan G suatu grup, H subgrup dari G, dan $a, b \in G$, maka Ha dan Hb adalah suatu koset kanan dari H di G. Akan ditunjukkan bahwa terdapat korespondensi satu-satu antara Ha dan Hb, yaitu terdapat pemetaan f yang bersifat satu-satu dan pada dari Ha ke Hb. Buat pengaitan f sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f : Ha &\longrightarrow Hb \\ h\ a &\longmapsto h\ b \end{aligned}$$

1. Akan ditunjukkan f terdefinisi dengan baik. Ambil $x_1, x_2 \in Ha$ dengan $x_1 = x_2$, akan ditunjukkan $f(x_1) = f(x_2)$. Oleh karena $x_1, x_2 \in Ha$, maka $x_1 = h_1\ a$ dan $x_2 = h_2\ a$ untuk suatu $h_1, h_2 \in H$. Oleh karena $h_1, h_2 \in H$, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka $h_1, h_2 \in G$. Oleh karena G suatu grup, maka ada unsur identitas di G yaitu e sedemikian sehingga untuk setiap $g \in G$ berlaku $g\ e = g\ e = g$. Oleh karena $a \in G$ dan G suatu grup, maka a mempunyai invers di G yaitu a^{-1} sedemikian

sehingga $a\ a^{-1} = a^{-1}\ a = e$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_2 \\
h_1\ a &= h_2\ a \\
(h_1\ a)\ a^{-1} &= (h_2\ a)\ a^{-1} \\
h_1\ (a\ a^{-1}) &= h_2\ (a\ a^{-1}) \\
h_1\ e &= h_2\ e \\
h_1 &= h_2 \\
h_1\ b &= h_2\ b \\
f\,(h_1\ a) &= f\,(h_2\ a) \\
f\,(x_1) &= f\,(x_2)
\end{aligned}$$

Jadi, f terdefinisi dengan baik atau f suatu pemetaan.

2. Akan ditunjukkan f pemetaan satu-satu. Ambil $x_1, x_2 \in Ha$ dengan $f\,(x_1) = f\,(x_2)$, akan ditunjukkan $x_1 = x_2$. Oleh karena $x_1, x_2 \in Ha$, maka $x_1 = h_1\ a$ dan $x_2 = h_2\ a$ untuk suatu $h_1, h_2 \in H$. Oleh karena $h_1, h_2 \in H$, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka $h_1, h_2 \in G$. Oleh karena G suatu grup, maka ada unsur identitas di G yaitu e sedemikian sehingga untuk setiap $g \in G$ berlaku $g\ e = g\ e = g$. Oleh karena $b \in G$ dan G suatu grup, maka b mempunyai invers di G yaitu b^{-1} sedemikian sehingga $b\ b^{-1} = b^{-1}\ b = e$.

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= f(x_2) \\
f(h_1\ a) &= f(h_2\ a) \\
h_1\ b &= h_2\ b \\
(h_1\ b)\ b^{-1} &= (h_2\ b)\ b^{-1} \\
h_1\ \left(b\ b^{-1}\right) &= h_2\ \left(b\ b^{-1}\right) \\
h_1\ e &= h_2\ e \\
h_1 &= h_2 \\
h_1\ a &= h_2\ a \\
x_1 &= x_2
\end{aligned}$$

Jadi, f suatu pemetaan satu-satu.

3. Akan ditunjukkan f pemetaan pada. Ambil $y \in Hb$, akan ditunjukkan terdapat $x \in Ha$ sedemikian sehingga $f(x) = y$. Oleh karena $y \in Hb$, maka $y = h\ b$ untuk suatu $h \in H$. Pilih $x = h\ a$, maka $f(x) = f(h\ a) = h\ b = y$. Jadi, f suatu pemetaan pada.

Oleh karena (1), (2), dan (3), maka terdapat korespondensi satu-satu antara setiap dua buah koset kanan dari H di G. □

Teorema 2.5.5. [3] *Misalkan G suatu grup hingga dan H subgrup dari G, maka $o(H)$ membagi $o(G)$.*

Bukti. Misalkan G suatu grup hingga dan H subgrup dari G, akan ditunjukkan $o(H)$ membagi $o(G)$. Misalkan $G = \{e, a_2, ..., a_t\}$. Berdasarkan Akibat

2.5.1 diperoleh $G = \bigcup\limits_{a \in G} Ha$. Ini berarti

$$G = He \cup Ha_2 \cup ... \cup Ha_t.$$

sehingga

$$o\,(G) = o\,(He)\ +\ o\,(Ha_2)\ +\ ...\ +\ o\,(Ha_t)\,.$$

Oleh karena $He = H$ dan berdasarkan Lemma 2.5.2 diperoleh $o\,(H) = o\,(He) = o\,(Ha_2) = ... = o\,(Ha_t)$ sehingga

$$\begin{aligned} o\,(G) &= \underbrace{o\,(H)\ +\ o\,(H)\ +\ ...\ +\ o\,(H)}_{t\ buah} \\ &= t\ o\,(H) \end{aligned}$$

untuk suatu t banyak koset kanan yang berbeda dari H di G. Ini berarti $o\,(H)$ membagi $o\,(G)$. □

Teorema 2.5.6. [3] *Misalkan G suatu grup, H subgrup dari G, dan $a, b \in G$, maka:*

1. *(a) $Ha = H$ jika dan hanya jika $a \in H$;*

   (b) $aH = H$ jika dan hanya jika $a \in H$;

2. *(a) $Ha = Hb$ jika dan hanya jika $a\ b^{-1} \in H$;*

   (b) $aH = bH$ jika dan hanya jika $a^{-1}\ b \in H$.

Bukti. Misalkan G suatu grup, H subgrup dari G, dan $a, b \in G$.

1. (a) Akan ditunjukkan $Ha = H$ jika dan hanya jika $a \in H$.

   ($\Rightarrow$) Misalkan $Ha = H$, akan ditunjukkan $a \in H$. Oleh karena

$Ha = H$, maka $h_1\ a = h_2$ untuk suatu $h_1, h_2 \in H$. Oleh karena H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka ada unsur identitas di H yaitu e sedemikian sehingga untuk setiap $h \in G$ berlaku $h\ e = e\ h = h$. Oleh karena $h_1 \in H$, H subgrup dari G dan G suatu grup, maka h_1 mempunyai invers di H yaitu h_1^{-1} sedemikian sehingga $h_1\ h_1^{-1} = h_1^{-1}\ h_1 = e$. Oleh karena $h_1, h_1^{-1}, h_2 \in H$, H subgrup dari G dan G suatu grup, maka $h_1, h_1^{-1}, h_2 \in G$. Oleh karena e unsur identitas di H, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka e unsur identitas di G sedemikian sehingga untuk setiap $g \in G$ berlaku $g\ e = e\ g = g$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
h_1\ a &= h_2 \\
h_1^{-1}\ (h_1\ a) &= h_1^{-1}\ h_2 \\
\left(h_1^{-1}\ h_1\right)\ a &= h_1^{-1}\ h_2 \\
e\ a &= h_1^{-1}\ h_2 \\
a &= h_1^{-1}\ h_2
\end{aligned}$$

Oleh karena $h_1^{-1}, h_2 \in H$, H subgrup dari G dan G suatu grup, maka $h_1^{-1}\ h_2 \in H$. Tulis $h_1^{-1}\ h_2 = h_3$ untuk suatu $h_3 \in H$, maka $a = h_3$ sehingga $a \in H$.

($\Leftarrow$) Misalkan $a \in H$. Akan ditunjukkan $Ha = H$, yaitu dengan menunjukkan:

(*) $Ha \subseteq H$,

(**) $H \subseteq Ha$.

Oleh karena $a \in H$, maka $a = h_1$ untuk suatu $h_1 \in H$.

(*) Akan ditunjukkan $Ha \subseteq H$. Ambil $x \in Ha$, akan ditunjukkan $x \in H$. Oleh karena $x \in Ha$, maka $x = h_2\ a$ untuk suatu $h_2 \in H$. Perahtikan bahwa:

$$\begin{aligned} x &= h_2\ a \\ &= h_2\ h_1 \end{aligned}$$

Oleh karena $h_1, h_2 \in H$, H subgrup gari G, dan G suatu grup, maka $h_2\ h_1 \in H$. Tulis $h_2\ h_1 = h_3$ untuk suatu $h_3 \in H$, maka $x = h_3$ sehingga $x \in H$.. Jadi, untuk setiap $x \in Ha$ diperoleh $x \in H$ sehingga $Ha \subseteq H$.

(**) Akan ditunjukkan $H \subseteq Ha$. Ambil $x \in H$, akan ditunjukkan $x \in Ha$. Oleh karena $x \in H$, maka $x = h_2$ untuk $h_2 \in H$. Oleh karena H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka ada unsur identitas di H yaitu e sedemikian sehingga untuk setiap $h \in G$ berlaku $h\ e = e\ h = h$. Oleh karena $a \in H$, H subgrup dari G dan G suatu grup, maka a mempunyai invers di H yaitu a^{-1} sedemikian sehingga $a\ a^{-1} = a^{-1}\ a = e$. Oleh karena $a, a^{-1}, h_2 \in H$, H subgrup dari G dan G suatu grup, maka $a, a^{-1}, h_2 \in G$. Oleh karena e unsur identitas di H, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka e unsur identitas di G sedemikian sehingga untuk setiap $g \in G$ berlaku $g\ e = e\ g = g$.

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} x &= h_2 \\ &= h_2\ e \\ &= h_2\ \left(a^{-1}\ a\right) \\ &= \left(h_2\ a^{-1}\right)\ a \end{aligned}$$

Oleh karena $a^{-1}, h_2 \in H$, H subgrup dari G dan G suatu grup, maka $h_2\ a^{-1} \in H$. Tulis $h_2\ a^{-1} = h_3$ untuk suatu $h_3 \in H$, maka $x = h_3\ a$ sehingga $x \in Ha$. Jadi, untuk setiap $x \in H$ diperoleh $x \in Ha$ sehingga $H \subseteq Ha$.

Oleh karena (*) dan (**), maka $Ha = H$. Jadi, $Ha = H$ jika dan hanya jika $a \in H$.

(b) Akan ditunjukkan $aH = H$ jika dan hanya jika $a \in H$.

($\Rightarrow$) Misalkan $aH = H$, akan ditunjukkan $a \in H$. Oleh karena $aH = H$, maka $a\ h_1 = h_2$ untuk suatu $h_1, h_2 \in H$. Oleh karena H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka ada unsur identitas di H yaitu e sedemikian sehingga untuk setiap $h \in G$ berlaku $h\ e = e\ h = h$. Oleh karena $h_1 \in H$, H subgrup dari G dan G suatu grup, maka h_1 mempunyai invers di H yaitu h_1^{-1} sedemikian sehingga $h_1\ h_1^{-1} = h_1^{-1}\ h_1 = e$. Oleh karena $h_1, h_1^{-1}, h_2 \in H$, H subgrup dari G dan G suatu grup, maka $h_1, h_1^{-1}, h_2 \in G$. Oleh karena e unsur identitas di H, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka e unsur identitas di G sedemikian sehingga untuk setiap $g \in G$ berlaku

$g\ e = e\ g = g$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} a\ h_1 &= h_2 \\ (a\ h_1)\ h_1^{-1} &= h_2\ h_1^{-1} \\ a\ \left(h_1\ h_1^{-1}\right) &= h_2\ h_1^{-1} \\ a\ e &= h_2\ h_1^{-1} \\ a &= h_2\ h_1^{-1} \end{aligned}$$

Oleh karena $h_1^{-1}, h_2 \in H$, H subgrup dari G dan G suatu grup, maka $h_2\ h_1^{-1} \in H$. Tulis $h_2\ h_1^{-1} = h_3$ untuk suatu $h_3 \in H$, maka $a = h_3$ sehingga $a \in H$.

($\Leftarrow$) Misalkan $a \in H$. Akan ditunjukkan $aH = H$, yaitu dengan menunjukkan:

(*) $aH \subseteq H$,

(**) $H \subseteq aH$.

Oleh karena $a \in H$, maka $a = h_1$ untuk suatu $h_1 \in H$.

(*) Akan ditunjukkan $aH \subseteq H$. Ambil $x \in aH$, akan ditunjukkan $x \in H$. Oleh karena $x \in aH$, maka $x = a\ h_2$ untuk suatu $h_2 \in H$. Perahtikan bahwa:

$$\begin{aligned} x &= a\ h_2 \\ &= h_1\ h_2 \end{aligned}$$

Oleh karena $h_1, h_2 \in H$, H subgrup gari G, dan G suatu grup, maka $h_1\ h_2 \in H$. Tulis $h_1\ h_2 = h_3$ untuk suatu $h_3 \in H$, maka

$x = h_3$ sehingga $x \in H$. Jadi, untuk setiap $x \in aH$ diperoleh $x \in H$ sehingga $aH \subseteq H$.

(**) Akan ditunjukkan $H \subseteq aH$. Ambil $x \in H$, akan ditunjukkan $x \in aH$. Oleh karena $x \in H$, maka $x = h_2$ untuk $h_2 \in H$. Oleh karena H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka ada unsur identitas di H yaitu e sedemikian sehingga untuk setiap $h \in G$ berlaku $h\ e = e\ h = h$. Oleh karena $a \in H$, H subgrup dari G dan G suatu grup, maka a mempunyai invers di H yaitu a^{-1} sedemikian sehingga $a\ a^{-1} = a^{-1}\ a = e$. Oleh karena $a, a^{-1}, h_2 \in H$, H subgrup dari G dan G suatu grup, maka $a, a^{-1}, h_2 \in G$. Oleh karena e unsur identitas di H, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka e unsur identitas di G sedemikian sehingga untuk setiap $g \in G$ berlaku $g\ e = e\ g = g$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} x &= h_2 \\ &= e\ h_2 \\ &= \left(a\ a^{-1}\right)\ h_2 \\ &= a\ \left(a^{-1}\ h_2\right) \end{aligned}$$

Oleh karena $a^{-1}, h_2 \in H$, H subgrup dari G dan G suatu grup, maka $a^{-1}\ h_2 \in H$. Tulis $a^{-1}\ h_2 = h_3$ untuk suatu $h_3 \in H$, maka $x = a\ h_3$ sehingga $x \in aH$. Jadi, untuk setiap $x \in H$ diperoleh $x \in aH$ sehingga $H \subseteq aH$.

Oleh karena (*) dan (**), maka $aH = H$. Jadi, $aH = H$ jika dan hanya jika $a \in H$.

2. (a) Akan ditunjukkan $Ha = Hb$ jika dan hanya jika $a\, b^{-1} \in H$.

(⇒) Misalkan $Ha = Hb$, akan ditunjukkan $a\, b^{-1} \in H$. Oleh karena $Ha = Hb$, maka $h_1\, a = h_2\, b$ untuk suatu $h_1, h_2 \in H$. Oleh karena H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka ada unsur identitas di H yaitu e sedemikian sehingga untuk setiap $h \in G$ berlaku $h\, e = e\, h = h$. Oleh karena $h_1 \in H$, H subgrup dari G dan G suatu grup, maka h_1 mempunyai invers di H yaitu h_1^{-1} sedemikian sehingga $h_1\, h_1^{-1} = h_1^{-1}\, h_1 = e$. Oleh karena $h_1, h_1^{-1}, h_2 \in H$, H subgrup dari G dan G suatu grup, maka $h_1, h_1^{-1}, h_2 \in G$. Oleh karena e unsur identitas di H, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka e unsur identitas di G sedemikian sehingga untuk setiap $g \in G$ berlaku $g\, e = e\, g = g$. Oleh karena $b \in G$ dan G suatu grup, maka b mempunyai invers di G yaitu b^{-1} sedemikian sehingga $b\, b^{-1} = b^{-1}\, b = e$.

Perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
h_1\, a &= h_2\, b \\
h_1^{-1}\,(\,h_1\, a\,) &= h_1^{-1}\ (h_2\, b) \\
\left(h_1^{-1}\, h_1\right)\, a &= \left(h_1^{-1}\, h_2\right)\, b \\
e\, a &= \left(h_1^{-1}\, h_2\right)\, b \\
a &= \left(h_1^{-1}\, h_2\right)\, b \\
a\, b^{-1} &= \left(\left(h_1^{-1}\, h_2\right)\, b\right)\, b^{-1} \\
a\, b^{-1} &= \left(h_1^{-1}\, h_2\right)\, \left(b\, b^{-1}\right) \\
a\, b^{-1} &= \left(h_1^{-1}\, h_2\right)\, e \\
a\, b^{-1} &= h_1^{-1}\, h_2
\end{aligned}
$$

Oleh karena $h_1^{-1}, h_2 \in H$, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka $h_1^{-1}\ h_2 \in H$. Tulis $h_1^{-1}\ h_2 = h_3$ untuk suatu $h_3 \in H$, maka $a\ b^{-1} = h_3$ sehingga $a\ b^{-1} \in H$.

($\Leftarrow$) Misalkan $a\ b^{-1} \in H$. Akan ditunjukkan $Ha = Hb$, yaitu dengan menunjukan:

(*) $Ha \subseteq Hb$,

(**) $Hb \subseteq Ha$.

Oleh karena $a\ b^{-1} \in H$, maka $a\ b^{-1} = h_1$ untuk suatu $h_1 \in H$. Oleh karena H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka ada unsur identitas di H yaitu e sedemikian sehingga untuk setiap $h \in G$ berlaku $h\ e = e\ h = h$. Oleh karena $h_1 \in H$, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka h_1 mempunyai invers di H yaitu h_1^{-1}

sedemikian sehingga $h_1\, h_1^{-1} = h_1^{-1}\, h_1 = e$. Oleh karena $h_1, h_1^{-1} \in H$, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka $h_1, h_1^{-1} \in G$. Oleh karena e unsur identitas di H, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka e unsur identitas di G sedemikian sehingga untuk setiap $g \in G$ berlaku $g\, e = e\, g = g$. Oleh karena $b \in G$ dan G suatu grup, maka b mempunyai invers di G yaitu b^{-1} sedemikian sehingga $b\, b^{-1} = b^{-1}\, b = e$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
a\, b^{-1} &= h_1 \\
\left(a\, b^{-1}\right) b &= h_1\, b \\
a\, \left(b^{-1}\, b\right) &= h_1\, b \\
a\, e &= h_1\, b \\
a &= h_1\, b \\
h_1^{-1}\, a &= h_1^{-1}\, (h_1\, b) \\
h_1^{-1}\, a &= \left(h_1^{-1}\, h_1\right) b \\
h_1^{-1}\, a &= e\, b \\
h_1^{-1}\, a &= b
\end{aligned}$$

(*) Akan ditunjukkan $Ha \subseteq Hb$. Ambil $x \in Ha$, akan ditunjukkan $x \in Hb$. Oleh karena $x \in Ha$, maka $x = h_2\, a$ untuk suatu $h_2 \in H$. Oleh karena $h_2 \in H$, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka $h_2 \in G$.

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} x &= h_2\ a \\ &= h_2\ (h_1\ b) \\ &= (h_2\ h_1)\ b \end{aligned}$$

Oleh karena $h_1, h_2 \in H$, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka $h_2\ h_1 \in H$. Tulis $h_2\ h_1 = h_3$ untuk suatu $h_3 \in H$, maka $x = h_3\ b$ untuk suatu $h_3 \in H$ sehingga $x \in Hb$. Jadi, untuk setiap $x \in Ha$ diperoleh $x \in Hb$ sehingga $Ha \subseteq Hb$.

(**) Akan ditunjukkan $Hb \subseteq Ha$. Ambil $x \in Hb$, akan ditunjukkan $x \in Ha$. Oleh karena $x \in Hb$, maka $x = h_2\ b$ untuk suatu $h_2 \in H$. Oleh karena $h_2 \in H$, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka $h_2 \in G$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} x &= h_2\ b \\ &= h_2\ \left(h_1^{-1}\ a\right) \\ &= \left(h_2\ h_1^{-1}\right)\ a \end{aligned}$$

Oleh karena $h_1^{-1}, h_2 \in H$, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka $h_2\ h_1^{-1} \in H$. Tulis $h_2\ h_1^{-1} = h_3$ untuk suatu $h_3 \in H$, maka $x = h_3\ a$ untuk suatu $h_3 \in H$ sehingga $x \in Ha$. Jadi, untuk setiap $x \in Hb$ diperoleh $x \in Ha$ sehingga $Hb \subseteq Ha$.

Oleh karena (*) dan (**), maka $Ha = Hb$. Jadi, $Ha = Hb$ jika dan hanya jika $a\ b^{-1} \in H$.

(b) Akan ditunjukkan $aH = bH$ jika dan hanya jika $a^{-1}\, b \in H$.

($\Rightarrow$) Misalkan $aH = bH$, akan ditunjukkan $a^{-1}\, b \in H$. Oleh karena $aH = bH$, maka $a\, h_1 = b\, h_2$ untuk suatu $h_1, h_2 \in H$. Oleh karena H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka ada unsur identitas di H yaitu e sedemikian sehingga untuk setiap $h \in G$ berlaku $h\, e = e\, h = h$. Oleh karena $h_2 \in H$, H subgrup dari G dan G suatu grup, maka h_2 mempunyai invers di H yaitu h_2^{-1} sedemikian sehingga $h_2\, h_2^{-1} = h_2^{-1}\, h_2 = e$. Oleh karena $h_1, h_2^{-1}, h_2 \in H$, H subgrup dari G dan G suatu grup, maka $h_1, h_2^{-1}, h_2 \in G$. Oleh karena e unsur identitas di H, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka e unsur identitas di G sedemikian sehingga untuk setiap $g \in G$ berlaku $g\, e = e\, g = g$. Oleh karena $b \in G$ dan G suatu grup, maka b mempunyai invers di G yaitu b^{-1} sedemikian sehingga $b\, b^{-1} = b^{-1}\, b = e$.

Perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
a\ h_1 &= b\ h_2 \\
a^{-1}\ (a\ h_1) &= a^{-1}\ (b\ h_2) \\
\left(a^{-1}\ a\right)\ h_1 &= \left(a^{-1}\ b\right)\ h_2 \\
e\ h_1 &= \left(a^{-1}\ b\right)\ h_2 \\
h_1 &= \left(a^{-1}\ b\right)\ h_2 \\
h_1\ h_2^{-1} &= \left(\left(a^{-1}\ b\right)\ h_2\right)\ h_2^{-1} \\
h_1\ h_2^{-1} &= \left(a^{-1}\ b\right)\ \left(h_2\ h_2^{-1}\right) \\
h_1\ h_2^{-1} &= \left(a^{-1}\ b\right)\ e \\
h_1\ h_2^{-1} &= a^{-1}\ b
\end{aligned}
$$

Oleh karena $h_1, h_2^{-1} \in H$, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka $h_1\ h_2^{-1} \in H$. Tulis $h_1\ h_2^{-1} = h_3$ untuk suatu $h_3 \in H$, maka $a^{-1}\ b = h_3$ sehingga $a^{-1}\ b \in H$.

($\Leftarrow$) Misalkan $a^{-1}\ b \in H$. Akan ditunjukkan $aH = bH$, yaitu dengan menunjukan:

(*) $aH \subseteq bH$,

(**) $bH \subseteq aH$.

Oleh karena $a^{-1}\ b \in H$, maka $a^{-1}\ b = h_1$ untuk suatu $h_1 \in H$. Oleh karena H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka ada unsur identitas di H yaitu e sedemikian sehingga untuk setiap $h \in G$ berlaku $h\ e = e\ h = h$. Oleh karena $h_1 \in H$, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka h_1 mempunyai invers di H yaitu h_1^{-1}

sedemikian sehingga $h_1\, h_1^{-1} = h_1^{-1}\, h_1 = e$. Oleh karena $h_1, h_1^{-1} \in H$, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka $h_1, h_1^{-1} \in G$. Oleh karena e unsur identitas di H, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka e unsur identitas di G sedemikian sehingga untuk setiap $g \in G$ berlaku $g\ e = e\ g = g$. Oleh karena $a \in G$ dan G suatu grup, maka b mempunyai invers di G yaitu a^{-1} sedemikian sehingga $a\ a^{-1} = a^{-1}\ a = e$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
a^{-1}\ b &= h_1 \\
a\ \left(a^{-1}\ b\right) &= a\ h_1 \\
\left(a\ a^{-1}\right)\ b &= a\ h_1 \\
e\ b &= a\ h_1 \\
b &= a\ h_1 \\
b\ h_1^{-1} &= \left(a\ h_1\right)\ h_1^{-1} \\
b\ h_1^{-1} &= a\ \left(h_1\ h_1^{-1}\right) \\
b\ h_1^{-1} &= a\ e \\
b\ h_1^{-1} &= a
\end{aligned}$$

(*) Akan ditunjukkan $aH \subseteq bH$. Ambil $x \in aH$, akan ditunjukkan $x \in bH$. Oleh karena $x \in aH$, maka $x = a\ h_2$ untuk suatu $h_2 \in H$. Oleh karena $h_2 \in H$, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka $h_2 \in G$.

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} x &= a\ h_2 \\ &= \left(b\ h_1^{-1}\right)\ h_2 \\ &= b\ \left(h_1^{-1}\ h_2\right) \end{aligned}$$

Oleh karena $h_2^{-1}\ h_1 \in H$, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka $h_1^{-1}\ h_2 \in H$. Tulis $h_1^{-1}\ h_2 = h_3$ untuk suatu $h_3 \in H$, maka $x = b\ h_3$ untuk suatu $h_3 \in H$ sehingga $x \in bH$. Jadi, untuk setiap $x \in aH$ diperoleh $x \in bH$ sehingga $aH \subseteq bH$.

(**) Akan ditunjukkan $bH \subseteq aH$. Ambil $x \in bH$, akan ditunjukkan $x \in aH$. Oleh karena $x \in bH$, maka $x = b\ h_2$ untuk suatu $h_2 \in H$. Oleh karena $h_2 \in H$, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka $h_2 \in G$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} x &= b\ h_2 \\ &= (a\ h_1)\ h_2 \\ &= a\ (h_1\ h_2) \end{aligned}$$

Oleh karena $h_1, h_2 \in H$, H subgrup dari G, dan G suatu grup, maka $h_1\ h_2 \in H$. Tulis $h_1\ h_2 = h_3$ untuk suatu $h_3 \in H$, maka $x = a\ h_3$ untuk suatu $h_3 \in H$ sehingga $x \in aH$. Jadi, untuk setiap $x \in bH$ diperoleh $x \in aH$ sehingga $bH \subseteq aH$.

Oleh karena (*) dan (**), maka $aH = bH$. Jadi, $aH = bH$ jika dan hanya jika $a^{-1}\ b \in H$.

$\square$