. .

# UKURAN ENTROPI BARU PADA HIMPUNAN KABUR INTUISIONISTIK BERNILAI INTERVAL

SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA

OLEH :

REZKY ATHARI NOVRITA

BP. 1510431024

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

PADANG

2019

## TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa:

| | |
|---|---|
| Nama | : Rezky Athari Novrita |
| No. Buku Pokok | : 1510431024 |
| Jurusan | : Matematika |
| Bidang | : Aljabar |
| Judul Skripsi | : **Ukuran Entropi Baru Pada Himpunan Kabur Intuisionistik Bernilai Interval** |

Telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal **17 Januari 2019** berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Pembimbing

1.

Dr. Admi Nazra
NIP.197303301999031008

2.

Nova Noliza Bakar, M.Si
NIP.196311041992032002

Penguji

1.

Prof Dr. I Made Arnawa
NIP. 196302181989031004

2.

Dr. Jenizon
NIP. 197006101998021001

3.

Monika Rianti Helmi, M.Si
NIP. 197407182005012002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika Universitas Andalas

Dr. Mahdhivan Syafwan
NIP. 198208032006041001

بسم الله الرحمن الرحيم

*"Ya Tuhanku Berilah aku ilham untuk tetap mensyukuri nikmat-Mu yang telah Engkau anugrahkan kepadaku dan kepada dua orang ibu bapakku dan untuk mengerjakan amal saleh yang Engkau ridhai, dan masukkanlah aku dengan rahmat-Mu ke dalam golongan hamba-hamba-Mu yang saleh"*

*(QS. An-Naml : 19)*

***Untuk Keluarga Tercinta***

***Kedua Orangtua:*** Untuk Mama ***Nofweni*** dan Papa ***Jufri*** yang tersayang, Alhamdulillah anak mama dan papa sekarang telah menyelesaikan perkuliahan dan sudah mendapatkan gelar sarjana. Terimakasih juga kepada Nenek ***Mayarni*** yang telah memberikan semangat untuk tidak pernah menyerah dalam kondisi apapun. Ini adalah hadiah kecil yang bisa uni berikan kepada mama dan papa, karena telah membesarkan uni dari kecil sampai sekarang. Terimakasih banyak telah memotivasi dan selalu memberi dukungan anak mu ini hingga sekarang ma, jasa-jasa mama tidak akan pernah bisa uni balas.

***Saudara***: Kakak ku tercinta ***Ainul Mardiah Novrita***, dan Adik ku tercinnta ***Fathin Zakiah Novrita*** akhirnya adikmu atau unimu sarjana , makasi buat dukungan dan do'anya.

***The Rumphi***

Terimakasih sahabat rumphi ku tersayang **Zizi, Intan, Tarak, Imur, Miword, Eyen, Bebek, Iwih, Nieh dan Udin**, meskipun kalian tidak selalu ada untuk ku karena kita terpisah setelah tamat SMA, tapi ku yakin di hati kalian selalu ada nama ku (hehehe). Semangat buat rumphi yang mau sempro, seminar dan sidang. Aku yakin kalian bisa.

***Tetangga***

Terimakasih sahabat semasa perkuliahan ku **Monyet, Sepi, Ila, Dini, Yola, Iin dan Sobep**. Jangan lupa kalau pergi main ajak aku, jangan lupa kalau ada yang mau semhas atau sidang undang aku, jangan lupa kalau ada masalah tentang dia atau yang lain cerita ke aku, jangan lupa dan jangan lupain aku ya. Sekali lagi makasih buat tetangga yang selalu ada dalam suka dan duka masa perkuliahan. Semangat yang lagi kuliah dan semangat yang lagi penelitian. Love you so much.

***KFGF***

Terimakasih sahabat SMP ku tersayang, yang selalu ada kalau lagi boring dan butuh refreshing keluar. Meskipun kita tidak satu kampus, tapi ku terharu karena kita tetap kompak dan tetap menjaga silaturahmi ini. Semoga kita menjadi sahabat hingga jannah ya. Amin.

***Keluarga Himatika***

Terimakasih kepada seluruh anggota keluarga himatika. Semoga himatika semakin jaya dan jaya selalu. Amin.

***Gamma'15***

Terimakasih untuk teman-teman angkatan ku yang sudah mengucapkan selamat kepada ku saat selesai semhas, aku terharu kalian ada untuk ku. Terimakasih juga telah menyemangati dan memberi dukungan bahwa aku bisa menyelesaikan skripsi ini. Sekali lagi terimakasih banyak untuk semua teman-teman Gamma'15.

***KKN BAYANG PESSEL***

Terimakasih teman-teman KKN BAYANG PESSEL khususnya JORONG KAPENCONG SQUAD **Ucha, Etek, Kembaranqu, Nisa, Bunda, Shindy, Kakem, Satria, Ibal dan Alif** yang selalu menemani hari-hari ku di Bayang Pessel. Aku selalu mendoakan yang terbaik untuk kalian. Jangan lupakan aku ya keluarga ku. Aku sayang kalian. Aku tau, pasti kalian sayang aku. Hehehe.

# KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbilalamin, segala puji Penulis ucapkan kepada Allah SWT yang telah memberikan rahmat, karunia dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "Ukuran Entropi Pada Himpunan Kabur Intuisionistik Bernilai Interval" ini, sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Shalawat dan salam semoga selalu tercurahkan kepada Rasulullah SAW yang telah menebarkan ilmu dan iman dalam cahaya Islam.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, dorongan, kerjasama maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah membantu dalam penulisan skripsi ini, terutama kepada:

1. Bapak Dr. Admi Nazra dan Ibu Nova Noliza Bakar, M.Si, selaku dosen pembimbing yang dengan sabar dan ikhlas telah meluangkan waktu dan pikirannya untuk memberikan ilmu, motivasi, dan nasehat dalam menyelesaikan skripsi ini.

2. Bapak Prof Dr. I Made Arnawa, Bapak Dr. Jenizon, dan Ibu Dr. Yanita, selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran untuk perbaikan dalam penulisan skripsi ini.

3. Ibu Monika Rianti Helmi, M.Si, selaku dosen Pembimbing Akademik

yang telah memberikan ilmu, motivasi serta nasehat kepada penulis selama masa studi.

4. Seluruh Bapak dan Ibu dosen yang telah memberikan ilmu dengan penuh kesabaran dan pengorbanan, serta keluarga besar Jurusan Mate-matika FMIPA Universitas Andalas yang telah membantu selama penu-lis melaksanakan studi.

5. Seluruh sahabat dan teman-teman yang telah memberi dukungan dan motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

6. Keluarga tercinta, Ibunda Nofweni dan Ayahanda Jufri, serta kakak Ainul Mardiah Novrita dan adik Fathin Zakiah Novrita tersayang.

Penulis sangat menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis mengharapkan kritik dan saran untuk kesempurnaan skripsi ini dimasa mendatang. Penulis berharap agar skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang memerlukan terutama dalam bidang ilmu matematika.

Padang, 21 Januari 2019

**Rezky Athari Novrita, S.Si**

# ABSTRAK

Dalam kehidupan nyata banyak sekali kasus yang mengandung unsur ketidakpastian atau ketidakjelasan. Oleh karena itu, masalah ketidakpastian ini dapat diselesaikan dengan teori himpunan kabur (*fuzzy set/FS*). Teori himpunan kabur telah diperkenalkan oleh Dr. L.A Zadeh pada tahun 1965, kemudian beberapa bentuk umum telah diusulkan dan dipelajari untuk mengatasi ketidakjelasan. Atanassov mengusulkan konsep himpunan kabur intuisio-nistik (*intuitionistic fuzzy set/IFS*) dan himpunan kabur intuisionistik bernilai interval (*interval value intuitionistic fuzzy set/IVIFS*) sebagai dua topik penting dalam teori himpunan kabur. Salah satu topik kajian di himpunan kabur adalah ukuran entropi. Entropi dari himpunan kabur menggambarkan tingkat kekaburan atau ketidakjelasan dari himpunan kabur. Pada tulisan ini akan diusulkan ukuran entropi baru untuk himpunan kabur intuisionistik bernilai interval, serta bagaimana perbedaan antara ukuran entropi baru tersebut dengan beberapa ukuran entropi *IVIFS* yang pernah diusulkan sebelumnya.

***Kata Kunci*** : *himpunan kabur, himpunan kabur intuisionistik, himpunan kabur bernilai interval, himpunan kabur intuisionistik bernilai interval, ukuran entropi.*

# DAFTAR ISI

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Himpunan tegas (*crisp set*) adalah himpunan yang keanggotaan elemen-elemennya memiliki nilai salah atau benar untuk menilai suatu masalah [14]. Dalam kehidupan nyata banyak sekali kasus yang mengandung unsur ketidakpastian atau ketidakjelasan. Oleh karena itu, masalah ketidakpastian ini dapat diselesaikan dengan teori himpunan kabur ($FS$).

Teori himpunan kabur telah diperkenalkan oleh Dr. L.A Zadeh [14] pada tahun 1965, kemudian beberapa bentuk umum telah diusulkan dan dipelajari untuk mengatasi ketidakjelasan. Atanassov mengusulkan konsep himpunan kabur intuisionistik ($IFS$) [1] dan himpunan kabur intuisionistik bernilai interval ($IVIFS$) [2] sebagai dua topik penting dalam teori himpunan kabur. Salah satu topik kajian di himpunan kabur adalah ukuran entropi. Entropi dari himpunan kabur menggambarkan tingkat kekaburan atau ketidakjelasan dari himpunan kabur.

De Luca dan Termini [7] memperkenalkan beberapa aksioma yang memberikan pemahaman intuitif untuk menggambarkan tingkat ketidakjelasan dari suatu himpunan kabur. Chiu dan Wang [5] memberikan perhitungan sederhana untuk entropi dari suatu himpunan kabur. Wei dan Zhang [11] memperluas ukuran entropi *IFS* ke *IVIFS* dengan mendefinisikan ukuran entropi baru untuk *IVIFS*.

Untuk pengukuran entropi *IVIFS*, Vlachos dan Sergiadis [9] mengungkapkan hubungan intuitif dan matematis antara gagasan entropi untuk *FS* dan *IFS* dalam hal ketidakjelasan dan intuisi. Mereka menunjukkan bahwa entropi untuk *FS* memang merupakan ukuran ketidakjelasan, sedangkan untuk *IFS*, entropi dapat mengukur ketidakjelasan dan intuisi. Ketidakjelasan didominasi oleh selisih antara derajat keanggotaan dan derajat ketidakanggotaan, dan intuisi didominasi oleh derajat keragu-raguan. Oleh karena itu, pada penelitian kali ini akan diperluas konsep ukuran entropi *IFS* pada *IVIFS* dengan mendefinisikan sebuah fungsi bernilai rill pada koleksi dari semua himpunan kabur intuisionistik bernilai interval sedemikian sehingga fungsi tersebut merupakan suatu ukuran entropi baru untuk *IVIFS*, serta bagaimana perbedaan antara ukuran entropi baru untuk *IVIFS* tersebut dengan ukuran entropi yang didefinisikan oleh Ye [13].

## 1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana mengembangkan konsep ukuran entropi *IFS* pada *IVIFS* dengan mendefinisikan sebuah fungsi bernilai rill pada koleksi dari semua himpunan kabur intuisionistik bernilai interval sedemikian sehingga fungsi tersebut merupakan suatu ukuran entropi baru untuk *IVIFS*, serta bagaimana perbedaan antara ukuran entropi baru untuk *IVIFS* oleh Wei dan Zhang [11] dengan ukuran entropi yang didefinisikan oleh Ye [13].

## 1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan penelitian ini adalah untuk:

1. Mendefinisikan sebuah fungsi bernilai rill pada koleksi dari semua himpunan kabur intuisionistik bernilai interval.
2. Memeriksa apakah fungsi tersebut merupakan ukuran entropi baru untuk himpunan kabur intuisionistik bernilai interval.
3. Membandingkan ukuran entropi baru untuk *IVIFS* oleh Wei dan Zhang [11] dengan ukuran entropi yang didefinisikan oleh Ye [13].

## 1.4 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut: Bab I Pendahuluan, yang memberikan gambaran singkat tentang: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan. Bab II Landasan teori, yang membahas mengenai teori-teori dasar sebagai acuan yang digunakan dalam pembahasan. Bab III Pembahasan, yang berisikan penjelasan mengenai sebuah ukuran entropi baru pada *IVIFS* dan perbandingan beberapa ukuran entropi. BAB IV Penutup, yang berisi kesimpulan dari hasil pembahasan.

# BAB II

# LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan disajikan teori-teori yang akan digunakan dalam pembahasan mengenai ukuran entropi pada himpunan kabur intuisionistik bernilai interval.

## 2.1 Himpunan Kabur Bernilai Interval (*Interval Value Fuzzy Set*)

Himpunan tegas atau himpunan klasik merupakan himpunan yang keanggotaan elemen-elemennya dinyatakan dalam derajat keanggotaan. Derajat keanggotaan ini bernilai 1 (satu) jika termasuk kedalam anggota himpunan dan bernilai 0 (nol) jika tidak termasuk kedalam anggota himpunan. Sedangkan pada himpunan kabur, derajat keanggotaan dari himpunan tersebut berada pada selang [0,1] dan ditentukan dengan fungsi keanggotaan $u_A : X \to [0,1]$. Suatu elemen dari $X$ tersebut adalah anggota dari himpunan kabur $A$ dengan derajat keanggotaan sebesar $\alpha$ jika $u_A(x) = \alpha$, dengan $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ [14].

**Definisi 2.1.1.** [14] *Misalkan $X$ adalah suatu himpunan semesta yang tak kosong. Suatu himpunan kabur $A$ atas $X$ didefinisikan sebagai:*

$$A = \{(x, u_A(x)) \,|x \in X\}, \tag{2.1.1}$$

*dimana* $u_A : X \to [0,1]$, *dan* $u_A(x)$ *disebut derajat keanggotaan atas* $x$ *pada himpunan kabur* $A$.

**Definisi 2.1.2.** [2] *Misalkan* $X$ *adalah suatu himpunan semesta yang tak kosong dan* $int(0,1)$ *adalah himpunan dari semua subinterval tertutup dari interval* $[0,1]$. *Suatu himpunan kabur bernilai interval (IVFS)* $A$ *atas* $X$ *didefinisikan sebagai:*

$$A = \{(x, u_A(x)) \,|x \in X\}, \tag{2.1.2}$$

*dimana* $u_A : X \to int(0,1)$, *dan* $u_A(x)$ *disebut derajat keanggotaan atas* $x \in X$ *pada himpunan kabur bernilai interval* $A$.

## 2.2 Himpunan Kabur Intuisionistik (*Intuitionistic Fuzzy Set*)

Himpunan kabur intuisionistik merupakan himpunan kabur yang memperhitungkan nilai keanggotaan dan nilai ketidakanggotaan.

**Definisi 2.2.1.** [1] *Misalkan* $X$ *adalah suatu himpunan semesta yang tak kosong. Suatu himpunan kabur intuisionistik (IFS)* $A$ *atas* $X$ *didefinisikan sebagai:*

$$A = \{(x, u_A(x), v_A(x)) \,|x \in X\}, \tag{2.2.3}$$

*dimana* $u_A, v_A : X \to [0,1]$, $u_A(x)$ *dan* $v_A(x)$ *berturut-turut menyatakan derajat keanggotaan dan derajat ketidakanggotaan atas* $x \in X$ *pada himpunan kabur intuisionistik* $A$. *Selanjutnya untuk setiap* $x \in X$ *berlaku:*

$$0 \leqslant u_A(x) + v_A(x) \leqslant 1$$

*dan* $\pi_A(x) = 1 - u_A(x) - v_A(x)$ *disebut derajat keragu-raguan keanggotaan atas* $x \in X$ *pada IFS A, artinya* $\pi_A(x)$ *menyatakan ketidaktahuan apakah* $x$ *mempunyai derajat keanggotaan atau tidak pada IFS dengan* $\pi_A : X \to [0,1]$ *untuk setiap* $x \in X$.

**Definisi 2.2.2.** [1] *Untuk dua IFS* $A = \{(x, u_A(x), v_A(x)) \,|x \in X\}$ *dan* $B = \{(x, u_B(x), v_B(x)) \,|x \in X\}$, *didefinisikan hubungan dan operasinya sebagai berikut:*

1. $A \subseteq B$ *jika dan hanya jika* $u_A(x) \leqslant u_B(x)$ *dan* $v_A(x) \geqslant v_B(x)$, *untuk setiap* $x \in X$;
2. *A=B jika dan hanya jika* $A \subseteq B$ *dan* $B \subseteq A$, *artinya A=B jika dan hanya jika* $u_A(x) = u_B(x)$ *dan* $v_A(x) = v_B(x)$;
3. $A^c = \{(x, v_A(x), u_A(x)) \,|x \in X\}$;
4. $A \cap B = \{(x, min\{u_A(x), u_B(x)\}, max\{(v_A(x), v_B(x)\}) \,|x \in X\}$;
5. $A \cup B = \{(x, max\{u_A(x), u_B(x)\}, min\{v_A(x), v_B(x)\}) \,|x \in X\}$.

## 2.3 Himpunan Kabur Intuisionistik Bernilai Interval (*Interval Value Intuitionistic Fuzzy Set*)

Derajat keanggotaan suatu elemen tertentu dari *IFS* tidak dapat diperkirakan secara tepat, namun dapat diberikan rentang nilai. Dalam kasus tersebut, Atanassov dan Gargov [2] memperkenalkan gagasan berikut tentang himpunan kabur intuisionistik bernilai interval.

**Definisi 2.3.1.** [2] *Misalkan $X$ adalah himpunan semesta yang tak kosong dan int(0,1) menunjukkan himpunan dari semua subinterval tertutup dari interval* $[0,1]$. *Suatu himpunan kabur intuisionistik bernilai interval (IVIFS) $A$ atas $X$ didefini-sikan sebagai:*

$$A = \{(x, u_A(x), v_A(x)) \, | x \in X\},$$

*dimana*

$$u_A : X \to int(0,1) \text{ dan } v_A : X \to int(0,1)$$

*dengan kondisi*

$$0 \leqslant sup(u_A(x)) + sup(v_A(x)) \leqslant 1.$$

*Jika dimisalkan*

$$u_A(x) = [u_A^-(x), u_A^+(x)] \text{ dan } v_A(x) = [v_A^-(x), v_A^+(x)]$$

*dengan $u_A^-(x)$ dan $u_A^+(x)$ masing-masing menunjukkan infimum dan suprimum dari $u_A(x)$, begitu juga dengan $v_A^-(x)$ dan $v_A^+(x)$ masing-masing menunjukkan infimum dan suprimum dari $v_A(x)$, maka*

$$\text{A} = \{(x, [u_A^-(x), u_A^+(x)], [v_A^-(x), v_A^+(x)]) \, | x \in X\} \tag{2.3.4}$$

*dengan kondisi* $0 \leqslant u_A^+(x) + v_A^+(x) \leqslant 1$.

*Kemudian interval*

$$[1 - u_A^+(x) - v_A^+(x), 1 - u_A^-(x) - v_A^-(x)] \tag{2.3.5}$$

*disingkat dengan $[\pi_A^-(x), \pi_A^+(x)]$ dan dilambangkan dengan $\pi_A(x)$ yang merupakan indeks intuisionistik bernilai interval atas $X$ pada $A$. Jelas bahwa jika*

$u_A(x) = u_A^-(x) = u_A^+(x)$ *dan* $v_A(x) = v_A^-(x) = v_A^+(x)$*, maka IVIFS A menjadi IFS A.*

**Definisi 2.3.2.** [4] *Misalkan int(0,1) menunjukkan himpunan dari semua subinterval tertutup dari interval* $[0,1]$*. Untuk* $[a_1, b_1], [a_2, b_2] \in int(0,1)$*, didefinisikan sebagai berikut:*

1. $[a_1, b_1] \leqslant [a_2, b_2]$ *jika dan hanya jika* $a_1 \leqslant a_2,\ b_1 \leqslant b_2$*;*

2. $[a_1, b_1] \geqslant [a_2, b_2]$ *jika dan hanya jika* $a_1 \geqslant a_2,\ b_1 \geqslant b_2$*;*

3. $[a_1, b_1] \preceq [a_2, b_2]$ *jika dan hanya jika* $a_1 \leqslant a_2,\ b_1 \geqslant b_2$*;*

4. $[a_1, b_1] \succeq [a_2, b_2]$ *jika dan hanya jika* $a_1 \geqslant a_2,\ b_1 \leqslant b_2$*;*

5. $[a_1, b_1] = [a_2, b_2]$ *jika dan hanya jika* $a_1 = a_2,\ b_1 = b_2$*.*

**Definisi 2.3.3.** [2] *Untuk dua IVIFS* $A = \{(x, [u_A^-(x), u_A^+(x)], [v_A^-(x), v_A^+(x)]) \mid x \in X\}$ *dan* $B = \{(x, [u_B^-(x), u_B^+(x)], [v_B^-(x), v_B^+(x)]) \mid x \in X\}$*, didefinisikan hubungan dan operasinya sebagai berikut:*

1. $A \subseteq B$ *jika dan hanya jika* $[u_A^-(x), u_A^+(x)] \leqslant [u_B^-(x), u_B^+(x)]$ *dan* $[v_A^-(x), v_A^+(x)] \geqslant [v_B^-(x), v_B^+(x)]$*, untuk setiap* $x \in X$*;*

2. $A = B$ *jika dan hanya jika* $A \subseteq B$ *dan* $B \subseteq A$*, artinya A=B jika dan hanya jika* $u_A^-(x) = u_B^-(x)$*,* $u_A^+(x) = u_B^+(x)$ *dan* $v_A^-(x) = v_B^-(x)$*,* $v_A^+(x) = v_B^+(x)$*;*

3. $A^c = \{(x, [v_A^-(x), v_A^+(x)], [u_A^-(x), u_A^+(x)]) \mid x \in X\}$*;*

4. $A \cap B = \{(x, [min\{u_A^-(x), u_B^-(x)\}, min\{u_A^+(x), u_B^+(x)\}], [max\{v_A^-(x), v_B^-(x)\}, max\{(v_A^+(x), v_B^+(x)\}]) \mid x \in X\}$*;*

5. $A \cup B = \{(x, [max\{u_A^-(x), u_B^-(x)\}, max\{u_A^+(x), u_B^+(x)\}], [min\{v_A^-(x), v_B^-(x)\}$
$, min\{v_A^+(x), v_B^+(x)\}]) \, |x \in X\}$.

**Definisi 2.3.4.** [12] *Misalkan* $a = [a^-, a^+]$ *dan* $b = [b^-, b^+]$, *maka nilai kemungkinan dari* $a \geqslant b$ *didefinisikan sebagai:*

$$p(a \geqslant b) = max\left\{1 - max\left\{\frac{b^+ - a^-}{l_a + l_b}, 0\right\}, 0\right\}, \tag{2.3.6}$$

*dimana* $l_a = a^+ - a^-$ *dan* $l_b = b^+ - b^-$.

*Dengan cara yang sama, nilai kemungkinan dari* $b \geqslant a$ *didefinisikan sebagai:*

$$p(b \geqslant a) = max\left\{1 - max\left\{\frac{a^+ - b^-}{l_a + l_b}, 0\right\}, 0\right\}. \tag{2.3.7}$$

Definisi di atas digunakan untuk membandingkan dua bilangan interval dan untuk menentukan peringkatnya.

## 2.4 Ukuran Entropi Himpunan Kabur Intuisionistik ( *Entropy Measures of Intuitionistic Fuzzy Set*)

Himpunan kabur biasanya menjelaskan tentang keadaan yang tidak jelas atau tidak tegas (kabur) pada suatu himpunan. Ketidakjelasan atau kekaburan itu berbeda-beda pada setiap himpunan kabur. Setiap himpunan kabur memiliki tingkat kekaburan tertentu yang dapat dinyatakan dengan suatu bilangan riil dalam selang [0,1]. Menurut De Luca dan Termini [7] ukuran tingkat ketidakjelasan atau kekaburan tersebut disebut ukuran entropi.

**Definisi 2.4.1.** [8] *Misalkan X adalah suatu himpunan semesta yang tak kosong, IFS(X) adalah himpunan dari semua himpunan kabur intuisionistik atas X,* *dan* $A = \{(x, [u_A^-(x), u_A^+(x)], [v_A^-(x), v_A^+(x)]) \mid x \in X\}$ *adalah suatu himpunan kabur intuisionistik* $A$ *atas* $X$*. Sebuah fungsi bernilai rill* $E : IFS(X) \to [0,1]$ *disebut ukuran entropi pada suatu IFS(X), jika E memenuhi sifat berikut:*

(E1) $E(A) = 0$ *jika dan hanya jika* $A$ *adalah suatu himpunan tegas (crisp set);*

(E2) $E(A) = 1$ *jika dan hanya jika* $u_A(x) = v_A(x)$*, untuk setiap* $x \in X$*;*

(E3) $E(A) = E(A^c)$ *(* $A^c$ *adalah komplemen dari* $A$*);*

(E4) $E(A) \leqslant E(B)$ *jika* $u_A(x) \geqslant u_B(x)$ *dan* $v_B(x) \geqslant v_A(x)$ *untuk* $u_B(x) \geqslant v_B(x)$ *atau* $u_A(x) \leqslant u_B(x)$ *dan* $v_B(x) \leqslant v_A(x)$ *untuk* $u_B(x) \leqslant v_B(x)$*, untuk setiap* $x \in X$*.*

# BAB III

# PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dijelaskan bagaimana memperluas konsep ukuran entropi *IFS* pada *IVIFS* dengan mendefinisikan suatu ukuran entropi baru pada *IVIFS* [11] dan membandingkan ukuran entropi baru untuk *IVIFS* oleh Wei dan Zhang [11] dengan ukuran entropi yang diperkenalkan oleh Ye [13].

## 3.1 Suatu Ukuran Entropi Baru pada *IVIFS*

Wei dan Zhang [11] memperluas aksioma dari Szmidt dan Kacprzyk [8] untuk ukuran entropi *IVIFS* dengan mendefinisikan suatu ukuran entropi baru yang dinotasikan dengan $E(A)$ [11] untuk *IVIFS*.

**Definisi 3.1.1.** [6] *Misalkan X adalah suatu himpunan semesta, IVIFS(X) adalah himpunan dari semua himpunan kabur intuisionistik bernilai interval atas X, dan* $A = \{(x_i, [u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)], [v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)]) \, | x_i \in X\}$ *adalah suatu himpunan kabur intuisionistik bernilai interval atas X. Sebuah fungsi bernilai riil E: IVIFS(X)* $\to [0,1]$ *disebut ukuran entropi pada suatu IVIFS(X), jika E memenuhi syarat berikut:*

*(E1)* $E(A) = 0$ *jika dan hanya jika A adalah suatu himpunan tegas (crisp set), yaitu* $u_A^-(x_i) = u_A^+(x_i) = 1$ *dan* $v_A^-(x_i) = v_A^+(x_i) = 0$ *atau* $u_A^-(x_i) = u_A^+(x_i) = 0$ *dan* $v_A^-(x_i) = v_A^+(x_i) = 1$ *untuk setiap* $x_i \in X$*;*

*(E2)* $E(A) = 1$ *jika dan hanya jika* $[u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)] = [v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)]$, *untuk setiap* $x_i \in X$;

*(E3)* $E(A) = E(A^c)$ *($A^c$ adalah komplemen dari $A$);*

*(E4)* $E(A) \leqslant E(B)$ *($A$ lebih tegas atau kurang kabur dari $B$) jika:*

$[u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)] \leqslant [u_B^-(x_i), u_B^+(x_i)]$ *dan* $[v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)] \geqslant [v_B^-(x_i), v_B^+(x_i)]$

*untuk* $[u_B^-(x_i), u_B^+(x_i)] \leqslant [v_B^-(x_i), v_B^+(x_i)]$

*atau*

$[u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)] \geqslant [u_B^-(x_i), u_B^+(x_i)]$ *dan* $[v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)] \leqslant [v_B^-(x_i), v_B^+(x_i)]$

*untuk* $[u_B^-(x_i), u_B^+(x_i)] \geqslant [v_B^-(x_i), v_B^+(x_i)]$

*atau*

$[u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)] \preceq [u_B^-(x_i), u_B^+(x_i)]$ *dan* $[v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)] \succeq [v_B^-(x_i), v_B^+(x_i)]$

*untuk* $[u_B^-(x_i), u_B^+(x_i)] \preceq [v_B^-(x_i), v_B^+(x_i)]$

*atau*

$[u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)] \succeq [u_B^-(x_i), u_B^+(x_i)]$ *dan* $[v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)] \preceq [v_B^-(x_i), v_B^+(x_i)]$

*untuk* $[u_B^-(x_i), u_B^+(x_i)] \succeq [v_B^-(x_i), v_B^+(x_i)]$

*untuk setiap* $x_i \in X$.

Pada Definisi (3.1.1) (E4), untuk menilai ukuran entropi pada setiap himpunan kabur intuisionistik bernilai interval bukanlah kondisi yang cukup. Hal ini dapat dilihat pada Contoh 3.1.1 berikut.

**Contoh 3.1.1.** Misalkan $X$ adalah suatu himpunan semesta, $A = \{(x, [0.2, 0.3], [0.4, 0.5]) \; | x \in X\}$, dan $B = \{(x, [0.3, 0.4], [0.5, 0.6]) \; | x \in X\}$ untuk suatu $A$ dan $B$ adalah himpunan kabur intuisionistik bernilai interval ($IVIFS$)

atas $X$. Untuk mengetahui diantara himpunan $A$ dan himpunan $B$ mana yang lebih kabur, tidak dapat digunakan Definisi 3.1.1 (E4) karena pada *IVIFS B* memenuhi $0.3 < 0.5$ dan $0.4 < 0.6$, tetapi $A \nsubseteq B$ (berdasarkan Definisi 2.3.3 (1)). Pada contoh ini dapat disimpulkan bahwa tidak dapat dibandingkan ukuran entropi dari himpunan $A$ dan himpunan $B$. Untuk itu diperlukan perhitungan ukuran entropi $A$ dan $B$ dengan menggunakan teorema berikut.

**Teorema 3.1.1.** [11] *Misalkan* $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n\}$ *adalah suatu himpunan semesta, IVIFS(X) adalah himpunan dari semua himpunan kabur intuisionistik bernilai interval atas X, dan* $A \in IVIFS(X)$. *Sebuah fungsi* $E(A)$ *yang didefinisikan sebagai,*

$$E(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{2(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\pi \tag{3.1.1}$$

*adalah suatu ukuran entropi untuk IVIFS.*

**Bukti.** Misalkan $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n\}$ adalah suatu himpunan semesta, *IVIFS(X)* adalah himpunan dari semua himpunan kabur intuisionistik bernilai interval atas $X$, dan $A = \{(x_i, [u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)], [v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)]) \, |x_i \in X\}$ adalah suatu himpunan kabur intuisionistik bernilai interval atas $X$. Oleh karena $0 \leqslant u_A^-(x_i), u_A^+(x_i), v_A^-(x_i), v_A^+(x_i), \pi_A^-(x_i), \pi_A^+(x_i) \leqslant 1$, sehingga diperoleh

$$0 \leqslant |u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| \leqslant 1 \tag{3.1.2}$$

$$0 \leqslant |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)| \leqslant 1 \tag{3.1.3}$$

$$1 \leqslant 1 + \frac{1}{2}\,\pi_A^+(x_i) + \frac{1}{2}\,\pi_A^-(x_i) \leqslant 2. \tag{3.1.4}$$

Dari persamaan (3.1.2) dan persamaan (3.1.3) diperoleh

$$0 \leqslant |u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)| \leqslant 2. \tag{3.1.5}$$

Dari persamaan (3.1.4) dan persamaan (3.1.5) diperoleh

$$0 \leqslant \frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{\left(1 + \dfrac{1}{2}\ \pi_A^+(x_i) + \dfrac{1}{2}\ \pi_A^-(x_i)\right)} \leqslant 2$$

$$0 \leqslant \frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{4\left(1 + \dfrac{1}{2}\ \pi_A^+(x_i) + \dfrac{1}{2}\ \pi_A^-(x_i)\right)} \leqslant \frac{2}{4}$$

$$0 \leqslant \frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{2(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\pi \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{3.1.6}$$

dengan demikian diperoleh

$$0 \leqslant cos\ \frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{2(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\pi \leqslant 1$$

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} cos\ \frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{2(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\pi \leqslant n$$

$$0 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} cos\ \frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{2(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\pi \leqslant 1$$

$$0 \leqslant E(A) \leqslant 1.$$

Akan ditunjukkan bahwa $E(A)$ pada persamaan (3.1.1) adalah ukuran entropi pada *IVIFS*, sehingga $E(A)$ memenuhi syarat (E1) sampai (E4) pada Definisi 3.1.1.

Selanjutnya akan diperiksa syarat (E1) sampai (E4) sebagai berikut.

(E1) Akan ditunjukkan $E(A) = 0$ jika dan hanya jika $A$ adalah himpunan tegas (*crisp set*).

($\Rightarrow$) Misalkan $E(A) = 0$. Akan ditunjukkan $A$ adalah himpunan tegas (*crisp set*).

Perhatikan bahwa

$$E(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{2(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\pi$$

$$\iff \qquad 0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{|u_A^-(x_i)-v_A^-(x_i)|+|u_A^+(x_i)-v_A^+(x_i)|}{2(2+\pi_A^+(x_i)+\pi_A^-(x_i))}\pi$$

$$\iff \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{|u_A^-(x_i)-v_A^-(x_i)|+|u_A^+(x_i)-v_A^+(x_i)|}{2(2+\pi_A^+(x_i)+\pi_A^-(x_i))}\pi$$

$$\iff \qquad 0 = \cos\frac{|u_A^-(x_i)-v_A^-(x_i)|+|u_A^+(x_i)-v_A^+(x_i)|}{2(2+\pi_A^+(x_i)+\pi_A^-(x_i))}\pi,$$

karena $0 = cos\,\dfrac{\pi}{2}$ maka

$$cos\,\frac{\pi}{2} = \cos\frac{|u_A^-(x_i)-v_A^-(x_i)|+|u_A^+(x_i)-v_A^+(x_i)|}{2(2+\pi_A^+(x_i)+\pi_A^-(x_i))}\pi$$

$$\iff \qquad \frac{\pi}{2} = \frac{|u_A^-(x_i)-v_A^-(x_i)|+|u_A^+(x_i)-v_A^+(x_i)|}{2(2+\pi_A^+(x_i)+\pi_A^-(x_i))}\pi,$$

karena $\pi_A^+(x_i) = 1 - u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)$ dan $\pi_A^-(x_i) = 1 - u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)$

diperoleh

$$|u_A^-(x_i)-v_A^-(x_i)|+|u_A^+(x_i)-v_A^+(x_i)|+(u_A^-(x_i)+v_A^-(x_i))+(u_A^+(x_i)+v_A^+(x_i)) = 4$$

$$|u_A^-(x_i)-v_A^-(x_i)|+|u_A^+(x_i)-v_A^+(x_i)|+|u_A^-(x_i)+v_A^-(x_i)|+|u_A^+(x_i)+v_A^+(x_i)| = 4,$$

dan karena $0 \leqslant u_A^+(x_i) + v_A^+(x_i) \leqslant 1$ maka:

$$|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| = 1$$

$$|u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)| = 1$$

$$|u_A^-(x_i) + v_A^-(x_i)| = 1$$

$$|u_A^+(x_i) + v_A^+(x_i)| = 1,$$

sehingga diperoleh

$$u_A^-(x_i) = u_A^+(x_i) = 1 \text{ dan } v_A^-(x_i) = v_A^+(x_i) = 0$$

atau

$$u_A^-(x_i) = u_A^+(x_i) = 0 \text{ dan } v_A^-(x_i) = v_A^+(x_i) = 1.$$

Oleh karena itu, $A = \{(x_i, [0,0], [1,1]) \,|x_i \in X\}$ atau $A = \{(x_i, [1,1]$ $, [0,0]) \,|x_i \in X\}$ adalah himpunan tegas (*Crisp set*).

($\Leftarrow$) Misalkan $A$ adalah himpunan tegas (*Crisp set*). Akan ditunjukkan $E(A) = 0$.

Untuk $A$ adalah himpunan tegas, terdapat dua kemungkinan yaitu $A = \{(x_i, [0,0], [1,1]) \,|x_i \in X\}$ atau $A = \{(x_i, [1,1], [0,0]) \,|x_i \in X\}$.

a. Untuk $A = \{(x_i, [0,0], [1,1]) \,|x_i \in X\}$ dan $\pi_A(x_i) = [0,0]$.

Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
E(A) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{2(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\pi \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{|0-1| + |0-1|}{2(2+0+0)}\pi \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{1+1}{4}\pi \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{1}{2}\pi \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

b. Untuk $A = \{(x_i, [1,1], [0,0]) \,|x_i \in X\}$ dan $\pi_A(x_i) = [0,0]$.

Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
E(A) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{2(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\pi \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{|1-0| + |1-0|}{2(2+0+0)}\pi \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{1}{2}\pi \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Jadi, jika $A$ adalah himpunan tegas (*Crisp set*) maka $E(A) = 0$.

Oleh karena $E(A) = 0$ jika dan hanya jika $A$ adalah himpunan tegas

(Crisp set) maka terbukti bahwa $E(A)$ memenuhi syarat (E1).

(E2) Akan ditunjukkan $E(A) = 1$ jika dan hanya jika $[u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)] = [v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)]$, untuk setiap $x_i \in X$.

($\Rightarrow$) Ambil $A \in IVIFS(X)$ sebarang dan misalkan $E(A) = 1$. Akan ditunjukkan bahwa $[u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)] = [v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)]$, untuk setiap $x_i \in X$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
E(A) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{2(2+\pi_A^+(x_i)+\pi_A^-(x_i))}\pi \\
\iff \quad 1 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{2(2+\pi_A^+(x_i)+\pi_A^-(x_i))}\pi \\
\iff \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{2(2+\pi_A^+(x_i)+\pi_A^-(x_i))}\pi \\
\iff \quad 1 &= \cos\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{2(2+\pi_A^+(x_i)+\pi_A^-(x_i))}\pi,
\end{aligned}$$

karena $1 = cos\ 0$ maka

$$\begin{aligned}
cos\ 0 &= \cos\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{2(2+\pi_A^+(x_i)+\pi_A^-(x_i))}\pi \\
\iff \quad 0 &= \frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{2(2+\pi_A^+(x_i)+\pi_A^-(x_i))}\pi \\
\iff \quad 0 &= |u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|,
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$u_A^-(x_i) = v_A^-(x_i) \text{ dan } u_A^+(x_i) = v_A^+(x_i)$$

atau

$$[u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)] = [v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)].$$

Terbukti bahwa jika $E(A) = 1$ maka $[u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)] = [v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)]$, untuk setiap $x_i \in X$.

($\Leftarrow$) Ambil $A \in IVIFS(X)$ sebarang dan misalkan $[u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)] = [v_A^-(x_i),\ v_A^+(x_i)]$, untuk setiap $x_i \in X$. Akan ditunjukkan bahwa $E(A) = 1$.

Perhatikan bahwa

$$u_A^-(x_i) = v_A^-(x_i) \text{ dan } u_A^+(x_i) = v_A^+(x_i)$$

atau

$$[u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)] = [v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)]$$

sehingga

$$\begin{aligned}
E(A) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{2(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\pi \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{|v_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |v_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{2(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\pi \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{|0| + |0|}{2(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\pi \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos 0\pi \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa jika $[u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)] = [v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)]$ maka $E(A) = 1$.

Oleh karena $E(A) = 1$ jika dan hanya jika $[u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)] = [v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)]$ untuk setiap $x_i \in X$, maka terbukti $E(A)$ memenuhi syarat (E2).

(E3) Akan ditunjukkan $E(A) = E(A^c)$ ($A^c$ adalah komplemen dari $A$).

Ambil sebarang $A \in IVIFS(X)$. Misalkan

$A = \{(x_i, [u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)], [v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)])\ |x_i \in X\}$ dan

$$A^c = \{(x_i, [u^-_{A^c}(x_i), u^+_{A^c}(x_i)], [v^-_{A^c}(x_i), v^+_{A^c}(x_i)]) \, | x_i \in X\}$$

$$= \{(x_i, [v^-_A(x_i), v^+_A(x_i)], [u^-_A(x_i), u^+_A(x_i)]) \, | x_i \in X\}.$$

sehingga $[\pi^-_A(x_i), \pi^+_A(x_i)] = [\pi^-_{A^c}(x_i), \pi^+_{A^c}(x_i)]$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
E(A) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{|u^-_A(x_i) - v^-_A(x_i)| + |u^+_A(x_i) - v^+_A(x_i)|}{2(2 + \pi^+_A(x_i) + \pi^-_A(x_i))}\pi \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{|v^-_A(x_i) - u^-_A(x_i)| + |v^+_A(x_i) - u^+_A(x_i)|}{2(2 + \pi^+_A(x_i) + \pi^-_A(x_i))}\pi \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{|u^-_{A^c}(x_i) - v^-_{A^c}(x_i)| + |u^+_{A^c}(x_i) - v^+_{A^c}(x_i)|}{2(2 + \pi^+_{A^c}(x_i) + \pi^-_{A^c}(x_i))}\pi \\
&= E(A^c).
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $E(A) = E(A^c)$ dan $E(A)$ memenuhi syarat (E3).

(E4) Akan ditunjukkan $E(A) \leqslant E(B)$ jika:

$u^-_A(x_i) \leqslant u^-_B(x_i)$, $u^+_A(x_i) \leqslant u^+_B(x_i)$ dan $v^-_A(x_i) \geqslant v^-_B(x_i)$, $v^+_A(x_i) \geqslant v^+_B(x_i)$

untuk $u^-_B(x_i) \leqslant v^-_B(x_i)$, $u^+_B(x_i) \leqslant v^+_B(x_i)$

atau

$u^-_A(x_i) \geqslant u^-_B(x_i)$, $u^+_A(x_i) \geqslant u^+_B(x_i)$ dan $v^-_A(x_i) \leqslant v^-_B(x_i)$, $v^+_A(x_i) \leqslant v^+_B(x_i)$

untuk $u^-_B(x_i) \geqslant v^-_B(x_i)$, $u^+_B(x_i) \geqslant v^+_B(x_i)$

atau

$u^-_A(x_i) \leqslant u^-_B(x_i)$, $u^+_A(x_i) \geqslant u^+_B(x_i)$ dan $v^-_A(x_i) \geqslant v^-_B(x_i)$, $v^+_A(x_i) \leqslant v^+_B(x_i)$

untuk $u^-_B(x_i) \leqslant v^-_B(x_i)$, $u^+_B(x_i) \geqslant v^+_B(x_i)$

atau

$u^-_A(x_i) \geqslant u^-_B(x_i)$, $u^+_A(x_i) \leqslant u^+_B(x_i)$ dan $v^-_A(x_i) \leqslant v^-_B(x_i)$, $v^+_A(x_i) \geqslant v^+_B(x_i)$

untuk $u^-_B(x_i) \geqslant v^-_B(x_i)$, $u^+_B(x_i) \leqslant v^+_B(x_i)$, untuk setiap $x_i \in X$.

Ambil $A, B \in IVIFS(X)$ sebarang. Akan ditunjukkan $E(A) \leqslant E(B)$

1. Misalkan $u_A^-(x_i) \leqslant u_B^-(x_i)$, $u_A^+(x_i) \leqslant u_B^+(x_i)$ dan $v_A^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i)$, $v_A^+(x_i) \geqslant v_B^+(x_i)$ untuk $u_B^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i)$, $u_B^+(x_i) \leqslant v_B^+(x_i)$. Artinya, $u_A^-(x_i) \leqslant u_B^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i) \leqslant v_A^-(x_i)$ dan $u_A^+(x_i) \leqslant u_B^+(x_i) \leqslant v_B^+(x_i) \leqslant v_A^+(x_i)$, untuk setiap $x_i \in X$.

   Jika

$$u_A^-(x_i) \leqslant u_B^-(x_i)$$
$$u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i) \leqslant u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i) \leqslant 0$$
$$|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| \geqslant |u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)|$$

dan

$$u_A^+(x_i) \leqslant u_B^+(x_i)$$
$$u_A^+(x_i) - v_A^+(xi) \leqslant u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i) \leqslant 0$$
$$|u_A^+(x_i) - v_A^+(xi)| \geqslant |u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)|$$

   maka diperoleh

$$|u_A^-(x_i)-v_A^-(x_i)|+|u_A^+(x_i)-v_A^+(x_i)| \geqslant |u_B^-(x_i)-v_B^-(x_i)|+|u_B^+(x_i)-v_B^+(x_i)|, \tag{3.1.7}$$

   dan

$$v_A^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i)$$
$$v_A^-(x_i) + u_A^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i) + u_B^-(x_i)$$
$$v_A^-(x_i)+u_A^-(x_i)+v_A^+(x_i)+u_A^+(x_i) \geqslant v_B^-(x_i)+u_B^-(x_i)+v_B^+(x_i)+u_B^+(x_i).$$

$$2 + \pi_B^+(x_i) + \pi_B^-(x_i) \geqslant 2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i). \tag{3.1.8}$$

Dari persamaan (3.1.7) dan persamaan (3.1.8) diperoleh

$$\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))} \geqslant \frac{|u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)| + |u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)|}{(2 + \pi_B^+(x_i) + \pi_B^-(x_i))}.$$

Dengan demikian,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} cos\frac{\pi}{2}\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} cos\frac{\pi}{2}\frac{|u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)| + |u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)|}{(2 + \pi_B^+(x_i) + \pi_B^-(x_i))}$$

$$E(A) \leqslant E(B).$$

2. Misalkan $u_A^-(x_i) \geqslant u_B^-(x_i)$, $u_A^+(x_i) \geqslant u_B^+(x_i)$ dan $v_A^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i)$, $v_A^+(x_i) \leqslant v_B^+(x_i)$ untuk $u_B^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i)$, $u_B^+(x_i) \geqslant v_B^+(x_i)$. Artinya, $v_A^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i) \leqslant u_B^-(x_i) \leqslant u_A^-(x_i)$ dan $v_A^+(x_i) \leqslant v_B^+(x_i) \leqslant u_B^+(x_i) \leqslant u_A^+(x_i)$, untuk setiap $x_i \in X$.

   Jika

$$u_A^-(x_i) \geqslant u_B^-(x_i)$$

$$u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i) \geqslant u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)$$

$$|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| \geqslant |u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)|$$

dan

$$u_A^+(x_i) \geqslant u_B^+(x_i)$$

$$u_A^+(x_i) - v_A^+(xi) \geqslant u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)$$

$$|u_A^+(x_i) - v_A^+(xi)| \geqslant |u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)|$$

   maka diperoleh

$$|u_A^-(x_i)-v_A^-(x_i)|+|u_A^+(x_i)-v_A^+(x_i)| \geqslant |u_B^-(x_i)-v_B^-(x_i)|+|u_B^+(x_i)-v_B^+(x_i)|, \tag{3.1.9}$$

   dan

$$v_A^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i)$$

$$v_A^-(x_i) + u_A^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i) + u_B^-(x_i)$$

$$v_A^-(x_i) + u_A^-(x_i) + v_A^+(x_i) + u_A^+(x_i) \geqslant v_B^-(x_i) + u_B^-(x_i) + v_B^+(x_i) + u_B^+(x_i)$$

$$2 + \pi_B^+(x_i) + \pi_B^-(x_i) \geqslant 2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i). \tag{3.1.10}$$

Dari persamaan (3.1.9) dan persamaan (3.1.10) diperoleh

$$\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))} \geqslant \frac{|u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)| + |u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)|}{(2 + \pi_B^+(x_i) + \pi_B^-(x_i))}.$$

Dengan demikian,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} cos\frac{\pi}{2}\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} cos\frac{\pi}{2}\frac{|u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)| + |u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)|}{(2 + \pi_B^+(x_i) + \pi_B^-(x_i))}$$

$$E(A) \leqslant E(B).$$

3. Misalkan $u_A^-(x_i) \leqslant u_B^-(x_i)$, $u_A^+(x_i) \geqslant u_B^+(x_i)$ dan $v_A^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i)$, $v_A^+(x_i) \leqslant v_B^+(x_i)$ untuk $u_B^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i)$, $u_B^+(x_i) \geqslant v_B^+(x_i)$. Artinya, $u_A^-(x_i) \leqslant u_B^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i) \leqslant v_A^-(x_i)$ dan $v_A^+(x_i) \leqslant v_B^+(x_i) \leqslant u_B^+(x_i) \leqslant u_A^+(x_i)$, untuk setiap $x_i \in X$.

   Jika

$$u_A^-(x_i) \leqslant u_B^-(x_i)$$

$$u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i) \leqslant u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i) \leqslant 0$$

$$|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| \geqslant |u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)|$$

dan

$$u_A^+(x_i) \geqslant u_B^+(x_i)$$

$$u_A^+(x_i) - v_A^+(xi) \geqslant u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)$$

$$|u_A^+(x_i) - v_A^+(xi)| \geqslant |u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)|$$

   maka diperoleh

$$|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)| \geqslant |u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)| + |u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)|, \tag{3.1.11}$$

dan

$$v_A^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i)$$

$$v_A^-(x_i) + u_A^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i) + u_B^-(x_i)$$

$$v_A^-(x_i) + u_A^-(x_i) + v_A^+(x_i) + u_A^+(x_i) \geqslant v_B^-(x_i) + u_B^-(x_i) + v_B^+(x_i) + u_B^+(x_i)$$

$$2 + \pi_B^+(x_i) + \pi_B^-(x_i) \geqslant 2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i). \qquad (3.1.12)$$

Dari persamaan (3.1.11) dan persamaan (3.1.12) diperoleh

$$\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))} \geqslant \frac{|u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)| + |u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)|}{(2 + \pi_B^+(x_i) + \pi_B^-(x_i))}.$$

Dengan demikian,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} cos\frac{\pi}{2}\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} cos\frac{\pi}{2}\frac{|u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)| + |u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)|}{(2 + \pi_B^+(x_i) + \pi_B^-(x_i))}$$

$$E(A) \leqslant E(B).$$

4. Misalkan $u_A^-(x_i) \geqslant u_B^-(x_i)$, $u_A^+(x_i) \leqslant u_B^+(x_i)$ dan $v_A^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i)$, $v_A^+(x_i) \geqslant v_B^+(x_i)$ untuk $u_B^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i)$, $u_B^+(x_i) \leqslant v_B^+(x_i)$. Artinya, $v_A^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i) \leqslant u_B^-(x_i) \leqslant u_A^-(x_i)$ dan $u_A^+(x_i) \leqslant u_B^+(x_i) \leqslant v_B^+(x_i) \leqslant v_A^+(x_i)$, untuk setiap $x_i \in X$.

   Jika

$$u_A^-(x_i) \geqslant u_B^-(x_i)$$

$$u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i) \geqslant u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)$$

$$|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| \geqslant |u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)|$$

dan

$$u_A^+(x_i) \leqslant u_B^+(x_i)$$

$$u_A^+(x_i) - v_A^+(xi) \leqslant u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i) \leqslant 0$$

$$|u_A^+(x_i) - v_A^+(xi)| \geqslant |u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)|$$

maka diperoleh

$$|u_A^-(x_i)-v_A^-(x_i)|+|u_A^+(x_i)-v_A^+(x_i)| \geqslant |u_B^-(x_i)-v_B^-(x_i)|+|u_B^+(x_i)-v_B^+(x_i)|, \tag{3.1.13}$$

dan

$$v_A^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i)$$

$$v_A^-(x_i) + u_A^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i) + u_B^-(x_i)$$

$$v_A^-(x_i) + u_A^-(x_i) + v_A^+(x_i) + u_A^+(x_i) \geqslant v_B^-(x_i) + u_B^-(x_i) + v_B^+(x_i) + u_B^+(x_i)$$

$$2 + \pi_B^+(x_i) + \pi_B^-(x_i) \geqslant 2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i). \tag{3.1.14}$$

Dari persamaan (3.1.13) dan persamaan (3.1.14) diperoleh

$$\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))} \geqslant \frac{|u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)| + |u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)|}{(2 + \pi_B^+(x_i) + \pi_B^-(x_i))}.$$

Dengan demikian,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} cos \frac{\pi}{2} \frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} cos \frac{\pi}{2} \frac{|u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)| + |u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)|}{(2 + \pi_B^+(x_i) + \pi_B^-(x_i))}$$

$$E(A) \leqslant E(B).$$

Dari (1),(2),(3) dan (4) terbukti bahwa $E(A) \leqslant E(B)$. Dengan demikian, $E(A)$ memenuhi syarat (E4).

Oleh karena itu, $E(A)$ memenuhi syarat (E1) sampai (E4) pada Definisi 3.1.1, sehingga $E(A)$ adalah suatu ukuran entropi pada *IVIFS*. Kemudian nilai $E(A)$ berada diantara 0 dan 1, atau $0 \leqslant E(A) \leqslant 1$.

■

Berikut ini diberikan bentuk umum dari ukuran entropi yang didefinisikan pada persamaan (3.1.1).

**Teorema 3.1.2.** [11] *Misalkan X adalah suatu himpunan semesta yang tak kosong, IVIFS(X) adalah himpunan dari semua himpunan kabur intuisionistik bernilai interval atas X, fungsi genap* $f : [-1, 1] \to [0, 1]$ *monoton turun pada* $[0, 1]$, $f(-1) = f(1) = 0$, $f(0) = 1$, *dan* $A \in IVIFS(X)$. *Sebuah fungsi* $E_f(A)$ *yang didefinisikan sebagai,*

$$E_f(A) = \frac{1}{n} \sum_{i}^{n} f\left(\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\right) \tag{3.1.15}$$

*adalah suatu ukuran entropi untuk IVIFS.*

**Bukti.** Misalkan $X$ adalah suatu himpunan semesta yang tak kosong, *IVIFS(X)* adalah himpunan dari semua himpunan kabur intuisionistik bernilai interval atas $X$, fungsi genap $f : [-1, 1] \to [0, 1]$ adalah monoton turun pada $[0, 1]$, $f(-1) = f(1) = 0$, $f(0) = 1$ dan $A \in IVIFS(X)$. Oleh karena $0 \leqslant u_A^-(x_i), u_A^+(x_i), v_A^-(x_i), v_A^+(x_i), \pi_A^-(x_i), \pi_A^+(x_i) \leqslant 1$, sehingga diperoleh

$$0 \leqslant |u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| \leqslant 1 \tag{3.1.16}$$

$$0 \leqslant |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)| \leqslant 1 \tag{3.1.17}$$

$$1 \leqslant 1 + \frac{1}{2}\,\pi_A^+(x_i) + \frac{1}{2}\,\pi_A^-(x_i) \leqslant 2. \tag{3.1.18}$$

Dari persamaan (3.1.16) dan persamaan (3.1.17) diperoleh

$$0 \leqslant |u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)| \leqslant 2. \tag{3.1.19}$$

Dari persamaan (3.1.18) dan persamaan (3.1.19) diperoleh

$$0 \leqslant \frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{\left(1 + \dfrac{1}{2}\,\pi_A^+(x_i) + \dfrac{1}{2}\,\pi_A^-(x_i)\right)} \leqslant 2$$

$$0 \leqslant \frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{2\left(1 + \dfrac{1}{2}\,\pi_A^+(x_i) + \dfrac{1}{2}\,\pi_A^-(x_i)\right)} \leqslant 1$$

$$0 \leqslant \frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))} \leqslant 1, \qquad (3.1.20)$$

dengan demikian diperoleh

$$0 \leqslant f\left(\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{2(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\right) \leqslant 1$$

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{2(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\right) \leqslant n$$

$$0 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{2(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\right) \leqslant 1$$

$$0 \leqslant E_f(A) \leqslant 1.$$

Akan ditunjukkan bahwa $E_f(A)$ yang didefinisikan pada persamaan (3.1.15) adalah ukuran entropi untuk *IVIFS*, sehingga $E_f(A)$ memenuhi syarat (E1) sampai (E4) pada Definisi 3.1.1.

Selanjutnya akan diperiksa syarat (E1) sampai (E4) sebagai berikut.

(E1) Akan ditunjukkan $E_f(A) = 0$ jika dan hanya jika $A$ adalah himpunan tegas (*Crisp set*).

($\Rightarrow$) Misalkan $E_f(A) = 0$. Akan ditunjukkan $A$ adalah himpunan tegas (*crisp set*).

Perhatikan bahwa

$$E_f(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2+\pi_A^+(x_i)+\pi_A^-(x_i))}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2+\pi_A^+(x_i)+\pi_A^-(x_i))}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 = f\left(\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2+\pi_A^+(x_i)+\pi_A^-(x_i))}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad f(1) = f\left(\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2+\pi_A^+(x_i)+\pi_A^-(x_i))}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1 = \frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2+\pi_A^+(x_i)+\pi_A^-(x_i))},$$

karena $\pi_A^+(x_i) = 1 - u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)$ dan $\pi_A^-(x_i) = 1 - u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)$

diperoleh

$$|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)| + u_A^-(x_i) + v_A^-(x_i) + u_A^+(x_i) + v_A^+(x_i) = 4$$

$$|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)| + |u_A^-(x_i) + v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) + v_A^+(x_i)| \quad = 4,$$

karena $0 \leqslant u_A^+(x_i) + v_A^+(x_i) \leqslant 1$ maka:

$$|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| = 1$$

$$|u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)| = 1$$

$$|u_A^-(x_i) + v_A^-(x_i)| = 1$$

$$|u_A^+(x_i) + v_A^+(x_i)| = 1,$$

sehingga diperoleh

$$u_A^-(x_i) = u_A^+(x_i) = 1 \text{ dan } v_A^-(x_i) = v_A^+(x_i) = 0$$

atau

$$u_A^-(x_i) = u_A^+(x_i) = 0 \text{ dan } v_A^-(x_i) = v_A^+(x_i) = 1$$

Oleh karena itu, $A = \{(x_i, [0,0], [1,1]) \,|x_i \in X\}$ atau $A = \{(x_i, [1,1]$ $, [0,0]) \,|x_i \in X\}$ dan terbukti bahwa $A$ adalah himpunan tegas (*Crisp set*).

($\Leftarrow$) Misalkan $A$ adalah himpunan tegas (*Crisp set*). Akan ditunjukkan

$E_f(A) = 0$.

Untuk $A$ adalah himpunan tegas, terdapat dua kemungkinan yaitu $A = \{(x_i, [0,0], [1,1]) \,|x_i \in X\}$ atau $A = \{(x_i, [1,1], [0,0]) \,|x_i \in X\}$.

a. Untuk $A = \{(x_i, [0,0], [1,1]) \,|x_i \in X\}$ dan $\pi_A(x_i) = [0,0]$.

   Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
E_f(A) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{|0-1| + |0-1|}{(2+0+0)}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{1+1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(1)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

b. Untuk $A = \{(x_i, [1,1], [0,0]) \,|x_i \in X\}$ dan $\pi_A(x_i) = [0,0]$.

   Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
E_f(A) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{|1-0| + |1-0|}{(2+0+0)}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(1)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Jadi, jika $A$ adalah himpunan tegas (*Crisp set*) maka $E_f(A) = 0$.

Oleh karena $E_f(A) = 0$ jika dan hanya jika $A$ adalah himpunan tegas (*Crisp set*) maka terbukti bahwa $E_f(A)$ memenuhi syarat (E1).

(E2) Akan ditunjukkan $E_f(A) = 1$ jika dan hanya jika $[u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)] = [v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)]$, untuk setiap $x_i \in X$.

($\Rightarrow$) Ambil $A \in IVIFS(X)$ sebarang dan misalkan $E_f(A) = 1$. Akan ditunjukkan bahwa $[u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)] = [v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)]$, untuk setiap $x_i \in X$.

Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
E_f(A) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\right) \\
\Longleftrightarrow \quad 1 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\right) \\
\Longleftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\right) \\
\Longleftrightarrow \quad 1 &= f\left(\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\right) \\
\Longleftrightarrow \quad f(0) &= f\left(\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\right) \\
\Longleftrightarrow \quad 0 &= \frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))} \\
\Longleftrightarrow \quad 0 &= |u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|,
\end{aligned}
$$

sehingga diperoleh

$$u_A^-(x_i) = v_A^-(x_i) \text{ dan } u_A^+(x_i) = v_A^+(x_i)$$

atau

$$[u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)] = [v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)].$$

Terbukti bahwa jika $[u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)] = [v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)]$ maka $E_f(A) = 1$.

Oleh karena $E_f(A) = 1$ jika dan hanya jika $[u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)] = [v_A^-(x_i),\ v_A^+(x_i)]$ untuk setiap $x_i \in X$, maka $E_f(A)$ memenuhi syarat (E2).

(E3) Akan ditunjukkan $E_f(A) = E_f(A^c)$ ($A^c$ adalah komplemen dari $A$).

Ambil sebarang $A \in IVIFS(X)$ sebarang. Misalkan

$A = \{(x_i, [u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)], [v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)]) \,|x_i \in X\}$, dan

$$A^c = \{(x_i, [u_{A^c}^-(x_i), u_{A^c}^+(x_i)], [v_{A^c}^-(x_i), v_{A^c}^+(x_i)]) \,|x_i \in X\}$$
$$= \{(x_i, [v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)], [u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)]) \,|x_i \in X\}.$$

sehingga $[\pi_A^-(x_i), \pi_A^+(x_i)] = [\pi_{A^c}^-(x_i), \pi_{A^c}^+(x_i)]$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
E_f(A) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{|v_A^-(x_i) - u_A^-(x_i)| + |v_A^+(x_i) - u_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{|u_{A^c}^-(x_i) - v_{A^c}^-(x_i)| + |u_{A^c}^+(x_i) - v_{A^c}^+(x_i)|}{(2 + \pi_{A^c}^+(x_i) + \pi_{A^c}^-(x_i))}\right) \\
&= E_f(A^c).
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $E_f(A) = E_f(A^c)$ dan $E_f(A)$ memenuhi syarat (E3).

(E4) Akan ditunjukan $E_f(A) \leqslant E_f(B)$ jika:

$u_A^-(x_i) \leqslant u_B^-(x_i)$, $u_A^+(x_i) \leqslant u_B^+(x_i)$ dan $v_A^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i)$, $v_A^+(x_i) \geqslant v_B^+(x_i)$

untuk $u_B^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i)$, $u_B^+(x_i) \leqslant v_B^+(x_i)$

atau

$u_A^-(x_i) \geqslant u_B^-(x_i)$, $u_A^+(x_i) \geqslant u_B^+(x_i)$ dan $v_A^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i)$, $v_A^+(x_i) \leqslant v_B^+(x_i)$

untuk $u_B^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i)$, $u_B^+(x_i) \geqslant v_B^+(x_i)$

atau

$u_A^-(x_i) \leqslant u_B^-(x_i)$, $u_A^+(x_i) \geqslant u_B^+(x_i)$ dan $v_A^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i)$, $v_A^+(x_i) \leqslant v_B^+(x_i)$

untuk $u_B^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i)$, $u_B^+(x_i) \geqslant v_B^+(x_i)$

atau

$u_A^-(x_i) \geqslant u_B^-(x_i)$, $u_A^+(x_i) \leqslant u_B^+(x_i)$ dan $v_A^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i)$, $v_A^+(x_i) \geqslant v_B^+(x_i)$ untuk $u_B^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i)$, $u_B^+(x_i) \leqslant v_B^+(x_i)$, untuk setiap $x_i \in X$.

Ambil $A, B \in IVIFS(X)$ sebarang. Akan ditunjukkan $E_f(A) \leqslant E_f(B)$

1. Misalkan $u_A^-(x_i) \leqslant u_B^-(x_i)$, $u_A^+(x_i) \leqslant u_B^+(x_i)$ dan $v_A^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i)$, $v_A^+(x_i) \geqslant v_B^+(x_i)$ untuk $u_B^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i)$, $u_B^+(x_i) \leqslant v_B^+(x_i)$. Artinya, $u_A^-(x_i) \leqslant u_B^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i) \leqslant v_A^-(x_i)$ dan $u_A^+(x_i) \leqslant u_B^+(x_i) \leqslant v_B^+(x_i) \leqslant v_A^+(x_i)$, untuk setiap $x_i \in X$.

   Jika

$$u_A^-(x_i) \leqslant u_B^-(x_i)$$
$$u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i) \leqslant u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i) \leqslant 0$$
$$|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| \geqslant |u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)|$$

   dan

$$u_A^+(x_i) \leqslant u_B^+(x_i)$$
$$u_A^+(x_i) - v_A^+(xi) \leqslant u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i) \leqslant 0$$
$$|u_A^+(x_i) - v_A^+(xi)| \geqslant |u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)|$$

   maka diperoleh

$$|u_A^-(x_i)-v_A^-(x_i)|+|u_A^+(x_i)-v_A^+(x_i)| \geqslant |u_B^-(x_i)-v_B^-(x_i)|+|u_B^+(x_i)-v_B^+(x_i)|, \quad (3.1.21)$$

   dan

$$v_A^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i)$$
$$v_A^-(x_i) + u_A^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i) + u_B^-(x_i)$$

$$v_A^-(x_i)+u_A^-(x_i)+v_A^+(x_i)+u_A^+(x_i) \geqslant v_B^-(x_i)+u_B^-(x_i)+v_B^+(x_i)+u_B^+(x_i)$$

$$2+\pi_B^+(x_i)+\pi_B^-(x_i) \geqslant 2+\pi_A^+(x_i)+\pi_A^-(x_i). \qquad (3.1.22)$$

Dari persamaan (3.1.21) dan persamaan (3.1.22) diperoleh

$$\frac{|u_A^-(x_i)-v_A^-(x_i)|+|u_A^+(x_i)-v_A^+(x_i)|}{(2+\pi_A^+(x_i)+\pi_A^-(x_i))} \geqslant \frac{|u_B^-(x_i)-v_B^-(x_i)|+|u_B^+(x_i)-v_B^+(x_i)|}{(2+\pi_B^+(x_i)+\pi_B^-(x_i))}.$$

Dengan demikian,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{|u_A^-(x_i)-v_A^-(x_i)|+|u_A^+(x_i)-v_A^+(x_i)|}{(2+\pi_A^+(x_i)+\pi_A^-(x_i))}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{|u_B^-(x_i)-v_B^-(x_i)|+|u_B^+(x_i)-v_B^+(x_i)|}{(2+\pi_B^+(x_i)+\pi_B^-(x_i))}\right)$$

$$E_f(A) \leqslant E_f(B).$$

2. Misalkan $u_A^-(x_i) \geqslant u_B^-(x_i)$, $u_A^+(x_i) \geqslant u_B^+(x_i)$ dan $v_A^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i)$, $v_A^+(x_i) \leqslant v_B^+(x_i)$ untuk $u_B^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i)$, $u_B^+(x_i) \geqslant v_B^+(x_i)$. Artinya, $v_A^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i) \leqslant u_B^-(x_i) \leqslant u_A^-(x_i)$ dan $v_A^+(x_i) \leqslant v_B^+(x_i) \leqslant u_B^+(x_i) \leqslant u_A^+(x_i)$, untuk setiap $x_i \in X$

   Jika

$$u_A^-(x_i) \geqslant u_B^-(x_i)$$

$$u_A^-(x_i)-v_A^-(x_i) \geqslant u_B^-(x_i)-v_B^-(x_i)$$

$$|u_A^-(x_i)-v_A^-(x_i)| \geqslant |u_B^-(x_i)-v_B^-(x_i)|$$

dan

$$u_A^+(x_i) \geqslant u_B^+(x_i)$$

$$u_A^+(x_i)-v_A^+(xi) \geqslant u_B^+(x_i)-v_B^+(x_i)$$

$$|u_A^+(x_i)-v_A^+(xi)| \geqslant |u_B^+(x_i)-v_B^+(x_i)|$$

   maka diperoleh

$$|u_A^-(x_i)-v_A^-(x_i)|+|u_A^+(x_i)-v_A^+(x_i)| \geqslant |u_B^-(x_i)-v_B^-(x_i)|+|u_B^+(x_i)-v_B^+(x_i)|, \qquad (3.1.23)$$

dan

$$v_A^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i)$$

$$v_A^-(x_i) + u_A^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i) + u_B^-(x_i)$$

$$v_A^-(x_i)+u_A^-(x_i)+v_A^+(x_i)+u_A^+(x_i) \geqslant v_B^-(x_i)+u_B^-(x_i)+v_B^+(x_i)+u_B^+(x_i)$$

$$2 + \pi_B^+(x_i) + \pi_B^-(x_i) \geqslant 2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i). \qquad (3.1.24)$$

Dari persamaan (3.1.23) dan persamaan (3.1.24) diperoleh

$$\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))} \geqslant \frac{|u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)| + |u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)|}{(2 + \pi_B^+(x_i) + \pi_B^-(x_i))}.$$

Dengan demikian,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{|u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)| + |u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)|}{(2 + \pi_B^+(x_i) + \pi_B^-(x_i))}\right)$$

$$E_f(A) \leqslant E_f(B).$$

3. Misalkan $u_A^-(x_i) \leqslant u_B^-(x_i)$, $u_A^+(x_i) \geqslant u_B^+(x_i)$ dan $v_A^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i)$, $v_A^+(x_i) \leqslant v_B^+(x_i)$ untuk $u_B^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i)$, $u_B^+(x_i) \geqslant v_B^+(x_i)$. Artinya, $u_A^-(x_i) \leqslant u_B^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i) \leqslant v_A^-(x_i)$ dan $v_A^+(x_i) \leqslant v_B^+(x_i) \leqslant u_B^+(x_i) \leqslant u_A^+(x_i)$, untuk setiap $x_i \in X$.

   Jika

$$u_A^-(x_i) \leqslant u_B^-(x_i)$$

$$u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i) \leqslant u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i) \leqslant 0$$

$$|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| \geqslant |u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)|$$

dan

$$u_A^+(x_i) \geqslant u_B^+(x_i)$$

$$u_A^+(x_i) - v_A^+(xi) \geqslant u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)$$

$$|u_A^+(x_i) - v_A^+(xi)| \geqslant |u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)|$$

maka diperoleh

$$|u_A^-(x_i)-v_A^-(x_i)|+|u_A^+(x_i)-v_A^+(x_i)| \geqslant |u_B^-(x_i)-v_B^-(x_i)|+|u_B^+(x_i)-v_B^+(x_i)|, \tag{3.1.25}$$

dan

$$v_A^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i)$$

$$v_A^-(x_i) + u_A^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i) + u_B^-(x_i)$$

$$v_A^-(x_i) + u_A^-(x_i) + v_A^+(x_i) + u_A^+(x_i) \geqslant v_B^-(x_i) + u_B^-(x_i) + v_B^+(x_i) + u_B^+(x_i)$$

$$2 + \pi_B^+(x_i) + \pi_B^-(x_i) \geqslant 2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i). \tag{3.1.26}$$

Dari persamaan (3.1.25) dan persamaan (3.1.26) diperoleh

$$\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))} \geqslant \frac{|u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)| + |u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)|}{(2 + \pi_B^+(x_i) + \pi_B^-(x_i))}.$$

Dengan demikian,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{|u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)| + |u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)|}{(2 + \pi_B^+(x_i) + \pi_B^-(x_i))}\right)$$

$$E_f(A) \leqslant E_f(B).$$

4. Misalkan $u_A^-(x_i) \geqslant u_B^-(x_i)$, $u_A^+(x_i) \leqslant u_B^+(x_i)$ dan $v_A^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i)$, $v_A^+(x_i) \geqslant v_B^+(x_i)$ untuk $u_B^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i)$, $u_B^+(x_i) \leqslant v_B^+(x_i)$. Artinya, $v_A^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i) \leqslant u_B^-(x_i) \leqslant u_A^-(x_i)$ dan $u_A^+(x_i) \leqslant u_B^+(x_i) \leqslant v_B^+(x_i) \leqslant v_A^+(x_i)$, untuk setiap $x_i \in X$.

   Jika

$$u_A^-(x_i) \geqslant u_B^-(x_i)$$

$$u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i) \geqslant u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)$$

$$|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| \geqslant |u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)|$$

dan

$$u_A^+(x_i) \leqslant u_B^+(x_i)$$

$$u_A^+(x_i) - v_A^+(xi) \leqslant u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i) \leqslant 0$$

$$|u_A^+(x_i) - v_A^+(xi)| \geqslant |u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)|$$

maka diperoleh

$$|u_A^-(x_i)-v_A^-(x_i)|+|u_A^+(x_i)-v_A^+(x_i)| \geqslant |u_B^-(x_i)-v_B^-(x_i)|+|u_B^+(x_i)-v_B^+(x_i)|, \quad (3.1.27)$$

dan

$$v_A^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i)$$

$$v_A^-(x_i) + u_A^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i) + u_B^-(x_i)$$

$$v_A^-(x_i) + u_A^-(x_i) + v_A^+(x_i) + u_A^+(x_i) \geqslant v_B^-(x_i) + u_B^-(x_i) + v_B^+(x_i) + u_B^+(x_i)$$

$$2 + \pi_B^+(x_i) + \pi_B^-(x_i) \geqslant 2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i). \quad (3.1.28)$$

Dari persamaan (3.1.27) dan persamaan (3.1.28) diperoleh

$$\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))} \geqslant \frac{|u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)| + |u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)|}{(2 + \pi_B^+(x_i) + \pi_B^-(x_i))}.$$

Dengan demikian,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{|u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)| + |u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)|}{(2 + \pi_B^+(x_i) + \pi_B^-(x_i))}\right)$$

$$E_f(A) \leqslant E_f(B).$$

Dari (1),(2),(3) dan (4) terbukti bahwa $E_f(A) \leqslant E_f(B)$. Dengan demikian, $E_f(A)$ memenuhi syarat (E4).

Oleh karena itu, $E_f(A)$ memenuhi syarat (E1) sampai (E4) pada Definisi 3.1.1, sehingga $E_f(A)$ adalah suatu ukuran entropi pada *IVIFS*. Fungsi yang berbeda memberikan ukuran entropi yang berbeda pula untuk *IVIFS*. Fungsi $E_f(A)$ adalah bentuk umum dari fungsi $E(A)$ karena salah satu contoh fungsi genap yaitu fungsi cos $x$.

$\blacksquare$

## 3.2 Perbandingan Beberapa Ukuran Entropi

Untuk $A \in IVIFS(X)$, Ye [13] mengusulkan dua ukuran entropi $L_1(A)$ dan $L_2(A)$ yaitu:

$$\begin{aligned} L_1(A) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Bigg(\Bigg[sin\ \frac{1+u_A^-(x_i)+pW_u(x_i)-v_A^-(x_i)-qW_v(x_i)}{4}\pi \\ &+ sin\ \frac{1-u_A^-(x_i)-pW_u(x_i)+v_A^-(x_i)+qW_v(x_i)}{4}\pi - 1\Bigg]\frac{1}{\sqrt{2}-1}\Bigg) \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

$$\begin{aligned} L_2(A) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Bigg(\Bigg[cos\ \frac{1+u_A^-(x_i)+pW_u(x_i)-v_A^-(x_i)-qW_v(x_i)}{4}\pi \\ &+ cos\ \frac{1-u_A^-(x_i)-pW_u(x_i)+v_A^-(x_i)+qW_v(x_i)}{4}\pi - 1\Bigg]\frac{1}{\sqrt{2}-1}\Bigg) \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

dimana $W_u(x_i) = u_A^+(x_i) - u_A^-(x_i)$, $W_v(x_i) = v_A^+(x_i) - v_A^-(x_i)$ dan untuk suatu $p, q \in [0,1]$.

Teorema berikut menunjukan persamaan (3.2.29) dan persamaan (3.2.30) adalah sama.

**Teorema 3.2.1.** [11] *Misalkan X adalah suatu himpunan semesta yang tak kosong, IVIFS(X) adalah himpunan dari semua himpunan kabur intuisionistik bernilai interval atas X. Untuk suatu $A \in IVIFS(X)$, misalkan*

$$L(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Bigg(\Bigg[\sqrt{2}\ cos\ \frac{u_A^-(x_i)+pW_u(x_i)-v_A^-(x_i)-qW_v(x_i)}{4}\pi - 1\Bigg]\frac{1}{\sqrt{2}-1}\Bigg) \tag{3.2.31}$$

*dimana $W_u(x_i) = u_A^+(x_i) - u_A^-(x_i)$, $W_v(x_i) = v_A^+(x_i) - v_A^-(x_i)$ dan untuk suatu $p, q \in [0,1]$.*

*Maka $L_1(A) = L_2(A) = L(A)$.*

**Bukti.** Misalkan:

$$a = \frac{1 + u_A^-(x_i) + pW_u(x_i) - v_A^-(x_i) - qW_v(x_i)}{4}\pi$$
$$b = \frac{1 - u_A^-(x_i) - pW_u(x_i) + v_A^-(x_i) + qW_v(x_i)}{4}\pi$$

maka

$$L_1(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left([sin\ a + sin\ b - 1]\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)$$
$$L_2(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left([cos\ a + cos\ b - 1]\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right).$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} sin\ a &= sin\ \frac{\pi}{2}\ sin\ a + cos\ \frac{\pi}{2}\ cos\ a \\ &= cos\ \frac{\pi}{2}\ cos\ a + sin\ \frac{\pi}{2}\ sin\ a \\ &= cos\left[\frac{\pi}{2} - a\right] \\ sin\ b &= sin\ \frac{\pi}{2}\ sin\ b + cos\ \frac{\pi}{2}\ cos\ b \\ &= cos\ \frac{\pi}{2}\ cos\ b + sin\ \frac{\pi}{2}\ sin\ b \\ &= cos\left[\frac{\pi}{2} - b\right], \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} L_1(A) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left([sin\ a + sin\ b - 1]\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left[cos\left[\frac{\pi}{2} - a\right] + cos\left[\frac{\pi}{2} - b\right] - 1\right]\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left([cos\ b + cos\ a - 1]\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left([cos\ a + cos\ b - 1]\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) \\ &= L_2(A). \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} cos\ b &= sin\ \frac{\pi}{2}\ cos\ b - cos\ \frac{\pi}{2}\ sin\ b \\ &= sin\ \frac{\pi}{2}\ cos\ b - cos\ \frac{\pi}{2}\ sin\ b \end{aligned}$$

$$= sin\left[\frac{\pi}{2} - b\right],$$

karena $L_1(A) = L_2(A)$ maka dapat disederhanakan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
L_1(A) &= L_2(A) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left([cos\ a + cos\ b - 1]\,\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left[cos\ a + sin\left[\frac{\pi}{2} - b\right] - 1\right]\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left([cos\ a + sin\ a - 1]\,\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left([sin\ a + cos\ a - 1]\,\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\ sin\ a + \frac{\sqrt{2}}{2}\ cos\ a - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{2}\left[cos\ \frac{\pi}{4}\ sin\ a + sin\ \frac{\pi}{4}\ cos\ a - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{2}\left[sin\ a\ cos\ \frac{\pi}{4}\ + cos\ a\ sin\ \frac{\pi}{4}\ - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{2}\left[sin\ \left[\frac{\pi}{4} + a\right] - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{2}\left[sin\ c - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{2}\left[sin\ \left[\frac{\pi}{2} + d\right] - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{2}\left[sin\ \frac{\pi}{2}\ cos\ d + cos\ \frac{\pi}{2}\ sin\ d - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left[\sqrt{2}\ cos\ d - 1\right]\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) \\
&= L(A)
\end{aligned}
$$

dimana $c = \dfrac{2 + u_A^-(x_i) + pW_u(x_i) - v_A^-(x_i) - qW_v(x_i)}{4}\pi$ dan

$$d = \frac{u_A^-(x_i) + pW_u(x_i) - v_A^-(x_i) - qW_v(x_i)}{4}\pi$$

Jadi terbukti $L_1(A) = L_2(A) = L(A)$.

$\blacksquare$

Contoh berikut menunjukan bahwa ukuran entropi $L(A)$ dapat menghasilkan beberapa kasus berlawanan.

**Contoh 3.2.2.** Misalkan

$$A_1 = \{(x_i, [0.1, 0.2], [0.1, 0.2])\, |x_i \in X\}$$

$$A_2 = \{(x_i, [0.3, 0.3], [0.1, 0.5])\, |x_i \in X\}$$

$$A_3 = \{(x_i, [0.1, 0.2], [0.3, 0.4])\, |x_i \in X\}$$

$$A_4 = \{(x_i, [0.2, 0.3], [0.4, 0.5])\, |x_i \in X\}$$

$$A_5 = \{(x_i, [0.3, 0.4], [0.5, 0.6])\, |x_i \in X\}$$

$$A_6 = \{(x_i, [0.2, 0.3], [0.5, 0.6])\, |x_i \in X\}$$

$$A_7 = \{(x_i, [0.1, 0.2], [0.5, 0.6])\, |x_i \in X\}$$

$$A_8 = \{(x_i, [0.1, 0.2], [0.7, 0.8])\, |x_i \in X\}$$

Tabel 3.2.1 memuat ukuran entropi dari $A_i$ oleh $E(A)$ dan $L(A)$.

Andaikan $p = q = 0.5$ di persamaan (3.2.31) sehingga menjadi,

$$L(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left[\sqrt{2}\, cos\, \frac{u_A^-(x_i) + u_A^+(x_i) - v_A^-(x_i) - v_A^+(x_i)}{8}\pi - 1\right]\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) \tag{3.2.32}$$

Tabel 3.2.1: Perbandingan ukuran entropi oleh $E(A)$ dan $L(A)$

| $from$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $A_7$ | $A_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E(A)$ | 1 | 0.9749 | 0.9781 | 0.9709 | 0.9595 | 0.9239 | 0.8855 | 0.6547 |
| $L(A)$ | 1 | 1 | 0.9580 | 0.9580 | 0.9580 | 0.9057 | 0.8329 | 0.6279 |

Dari Tabel 3.2.1, dapat dilihat bahwa $E(A_i)$ untuk $i = 1, 2, .., 8$, semakin dekat derajat keanggotaan dan derajat ketidakanggotaan suatu $x_i$ atau semakin besar derajat keragu-raguan suatu $x_i$, semakin besar pula ukuran entropinya. Terutama ketika derajat keanggotaan dan derajat ketidakanggotaan sama, ukuran entropi mencapai nilai maksimum yaitu 1. Hasil yang diperoleh dengan menggunakan $E(A)$ sesuai secara intuisi.

Dapat dilihat juga bahwa $L(A_2) = 1$, sehingga $L(A_2)$ tidak memenuhi kondisi (E2) pada Definisi 3.1.1, karena derajat keanggotaan dan derajat ketidakanggotaan suatu $x_i$ tidak sama. Nilai mutlak selisih antara derajat keanggotaan dan derajat ketidakanggotaan suatu $x_i$ untuk $A_3, A_4$, dan $A_5$ adalah sama. Dengan menggunakan persamaan (3.2.32) diperoleh $L(A_3) = L(A_4) = L(A_5) = 0.9580$, tetapi dapat dilihat bahwa derajat keragu-raguan (hesitancy) dari elemen $x_i$ untuk $A_3, A_4$, dan $A_5$ adalah berbeda. Secara intuitif, tingkat kekaburan dari $A_3$ lebih dari $A_4$, dan tingkat kekaburan dari $A_5$ adalah yang paling rendah. Jelas, hasil yang diperoleh dari menggunakan ukuran entropi oleh Ye [13] tidak masuk akal.

Oleh karena itu, dibandingkan dengan ukuran entropi $L(A)$, ukuran entropi $E(A)$ yang didefinisikan oleh persamaan (3.1.1) lebih efektif dan logis (sesuai secara intuisi) untuk mengukur tingkat kekaburan dari *IVIFS*.

**Contoh 3.2.3.** Misalkan $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ adalah suatu himpunan semesta yang tak kosong. Misalkan $A = \{(x_i, [0.2, 0.3], [0.4, 0.6]) \,|x_i \in X\}$ dan $B = \{(x_i, [0.2, 0.4], [0.3, 0.4]) \,|x_i \in X\}$ dengan $A$ dan $B$ adalah *IVIFS* atas *X*. Akan dibandingkan ukuran entropi pada himpunan A dan himpunan B.

Berdasarkan Definisi (3.1.1) dapat dilihat bahwa $E(A) \leqslant E(B)$, karena $u_A^-(x_i) \leqslant u_B^-(x_i)$, $u_A^+(x_i) \leqslant u_B^+(x_i)$ dan $v_A^-(x_i) \geqslant v_B^-(x_i)$, $v_A^+(x_i) \geqslant v_B^+(x_i)$

untuk $u_B^-(x_i) \leqslant v_B^-(x_i)$, $u_B^+(x_i) \leqslant v_B^+(x_i)$. Selanjutnya akan ditunjukan bahwa $E(A) \leqslant E(B)$, sehingga akan dihitung $E(A)$ dan $E(B)$ berdasarkan persamaan (3.1.1). Jika

$$\begin{aligned}
[\pi_A^-(x_i), \pi_A^+(x_i)] &= [1 - u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i), 1 - u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)] \\
&= [1 - 0.3 - 0.6, 1 - 0.2 - 0.4] \\
&= [0.1{,}0.4]
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
[\pi_B^-(x_i), \pi_B^+(x_i)] &= [1 - u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i), 1 - u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)] \\
&= [1 - 0.4 - 0.4, 1 - 0.2 - 0.3] \\
&= [0.2{,}0.5],
\end{aligned}$$

maka diperoleh $E(A)$ dan $E(B)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
E(A) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{2(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\pi \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{|0.2 - 0.4| + |0.3 - 0.6|}{2(2 + 0.4 + 0.1)}\pi \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{|0.2| + |0.3|}{2(2.5)}\pi \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{0.5}{5}\pi \\
&= \frac{1}{n}(n \ \cos \frac{0.5}{5}\pi) = \cos \frac{0.5}{5}\pi \approx 0.9510
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
E(B) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{|u_B^-(x_i) - v_B^-(x_i)| + |u_B^+(x_i) - v_B^+(x_i)|}{2(2 + \pi_B^+(x_i) + \pi_B^-(x_i))}\pi \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{|0.2 - 0.3| + |0.4 - 0.4|}{2(2 + 0.5 + 0.2)}\pi \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{|0.1| + |0|}{2(2.7)}\pi \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{0.1}{5.4}\pi \\
&= \frac{1}{n}(n \ \cos \frac{0.1}{5.4}\pi) = \cos \frac{0.1}{5.4}\pi \approx 0.9983.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, dapat ditunjukan bahwa $E(A) < E(B)$ maka *IVIFS* $A$ kurang kabur atau lebih tegas dari *IVIFS* $B$.

# BAB IV

# KESIMPULAN

Berdasarkan hasil yang diperoleh pada BAB III dapat disimpulkan bahwa :

1. Ukuran entropi pada himpunan kabur intuisionistik bernilai interval adalah suatu ukuran untuk mengukur tingkat kekaburan atau tingkat ketidakjelasan dari suatu himpunan kabur intuisionistik bernilai interval.

2. Misalkan suatu *IVIFS* $A = \{(x_i, [u_A^-(x_i), u_A^+(x_i)], [v_A^-(x_i), v_A^+(x_i)])|x_i \in X\}$ dan terbukti bahwa suatu ukuran entropi baru untuk *IVIFS* adalah
$$E(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{|u_A^-(x_i) - v_A^-(x_i)| + |u_A^+(x_i) - v_A^+(x_i)|}{2(2 + \pi_A^+(x_i) + \pi_A^-(x_i))}\pi.$$

3. Ukuran entropi $E(A)$ lebih efektif dan logis untuk mengukur tingkat kekaburan atau ketidakjelasan dari suatu himpunan kabur intuisionistik bernilai interval (*IVIFS*) dibandingkan dengan ukuran entropi yang yang diperkenalkan oleh Ye [13].

# DAFTAR PUSTAKA


[1] Atanassov, K.T. 1986. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems.* **20**:87-96

[2] Atanassov, K. & G. Gargov. 1989. Interval-valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems.* **31**:343-349

[3] Bartle, R.G. & D.R. Sherbert.1994. *Introduction to Real Analysis.* Fourth Edition. John Wiley & Sons, Singapure

[4] Burillo, P. & H. Bustince. 1996. Entropy on intuisionistik fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems.* **78**:305-316

[5] Chiu, C.H. & W.J. Wang. 2000. Simple calculation for the entropy of the fuzzy number in addition and extension principle. *International journal of fuzzy systems.* **2**:256-266

[6] Liu, X.D.,S.H. Zhang, & F.L. Xiong. 2005. Entropy and subsethood for general interval-valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Systems and Knowledge Discovery.* **181**:4273-4286

[7] Luca, A. de & S. Termini. 1972. A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. *Information and Computation.* **20**:301-312

[8] Szmidt, E. & J. Kacprzyk. 2001. Entropy for intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*. **118**:467-477

[9] Vlachos, I.K. & G.D Sergiadis. 2007. Intuitionistic fuzzy information-aplications to pattern recognition. *Pattern Recognition Letters*. **28**:197-206

[10] Wei, C.P.,P. Wang. & Y.Z. Zhang. 2011. Entropi Similarity measure of interval-valued intuitionistic fuzzy sets and their applications. *Information Sciences*. **181**:4273-4286

[11] Wei, C.P. & Y.Z. Zhang. 2015. Entropy measures for interval valued intuitionistic fuzzy sets and their application in group decision making. *Information Sciences*. **13**:1155-1168

[12] Xu, Z. & Da, Q.L. 2002. The uncertain OWA operator. *Int. J. Intell. Syst.* **17**: 569-575

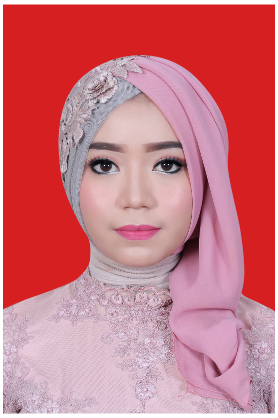
[13] Ye, J. 2010. Multicriteria fuzzy decision-making method using entropy weight-based correlation coefficients of interval-valued intuitionistic fuzzy sets . *Applied Mathematical Modelling*. **34**:3864-3870

[14] Zadeh, L.A. 1965. Fuzzy sets. *Information and Computation*. **8**:338-353

[15] Zeng, W. & H. Li. 2006. Inclusion measures, similarity measures and the fuzzyness of fuzzy sets and their relations. *International Journal of Intelligent Systems*. **20**:301-312

[16] Zeng, W. & H. Li. 2006. Relationship between similarity measure and entropy of interval valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*. **157**:1437-1484

# RIWAYAT HIDUP



Penulis bernama Rezky Athari Novrita, tempat kelahiran di Padang, tanggal 03 Maret 1997. Penulis merupakan anak kedua dari pasangan Jufri dan Nofweni. Penulis menamatkan pendidikan di SDN 33 Sawahan pada tahun 2009, SMPN 18 Padang pada tahun 2012 dan SMAN 3 Padang pada tahun 2015. Pada tahun 2015 penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas.

Selama menjadi mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas, penulis aktif dalam organisasi / lembaga kemahasiswaan, yaitu sebagai anggota Himatika Unand pada tahun 2016-2018, dan anggota aktif Koperasi Mahasiswa Unand (KOPMA Unand) pada tahun 2016-2017. Selama menjadi mahasiswa penulis melaksanakan KKN (Kuliah Kerja Nyata) di Nagari Kapelgam Koto Berapak Pesisir Selatan pada tahun 2018 dalam rangka melaksanakan salah satu mata kuliah wajib fakultas.

Alhamdulillah berkat usaha, doa, dan dukungan serta izin Allah SWT, penulis dapat menyelesaikan studi di Universitas Andalas selama tiga tahun enam bulan pada tanggal 17 Januari 2019 dengan meraih gelar Sarjana Sains (S.Si). Selama menjalani masa-masa perkuliahan ini, penulis mendapatkan banyak pelajaran, baik dalam ilmu pengetahuan maupun dalam kehidupan bermasyarakat.