

BAB IV

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan tentang sifat-sifat yang terkait dengan matriks idempoten dapat disimpulkan bahwa:

1. Sifat-sifat matriks idempoten terkait dengan matriks lainnya yaitu:
 - a. Misalkan A adalah matriks idempoten berukuran $n \times n$. Maka, untuk sebarang matriks nonsingular B berukuran $n \times n$, maka $B^{-1}AB$ adalah idempoten.
 - b. Jika A adalah matriks idempoten yang simetris, maka $I - 2A$ adalah ortogonal.
 - c. Misalkan A matriks berukuran $n \times n$. Maka berlaku, $\frac{1}{2}(I + A)$ adalah matriks idempoten jika dan hanya jika A adalah matriks involutory.
 - d. Misalkan A dan B adalah matriks simetris yang idempoten. Jika $C(A) = C(B)$ maka $A = B$.
 - e. Misalkan A matriks berukuran $m \times n$. Maka A^+A yang merupakan matriks berukuran $n \times n$ dan AA^+ yang berukuran $m \times m$, keduanya adalah matriks idempoten.
2. Sifat-sifat ruang null, ruang kolom, rank dan trace dari matriks idempoten.

a. Untuk sebarang matriks idempoten A berukuran $n \times n$, maka

$$rk(A) = tr(A).$$

b. Misalkan A matriks berukuran $n \times n$. Maka berlaku, $N(A) = C(I - A)$ jika dan hanya jika A adalah matriks idempoten.

c. Misalkan A matriks berukuran $n \times n$. Maka berlaku, $C(A) = N(I - A)$ jika dan hanya jika A adalah matriks idempoten.

d. Misalkan A suatu matriks berukuran $n \times n$. A matriks idempoten jika dan hanya jika $rk(A) + rk(I - A) = n$.

e. Misalkan A matriks berukuran $m \times n$. Maka

(a.) $rk(A^+A) = tr(A^+A)$ dan $rk(AA^+) = tr(AA^+)$.

(b.) $rk(I - A^+A) = tr(I - A^+A) = n - rk(A^+A)$.

(c.) $rk(I - AA^+) = tr(I - AA^+) = m - rk(AA^+)$.

f. Misalkan A_1, \dots, A_k matriks berukuran $n \times n$ dan misalkan $A = A_1 + \dots + A_k$ dan A adalah matriks idempoten. Maka, pernyataan berikut ekuivalen.

(a.) $A_i A_j = \mathbb{O}$ untuk $j \neq i = 1, \dots, k$ dan $rk(A_i^2) = rk(A_i)$ untuk $i = 1, \dots, k$.

(b.) $A_i^2 = A_i$ untuk $i = 1, \dots, k$.

(c.) $rk(A_1) + \dots + rk(A_k) = rk(A)$.