

## BAB IV

### KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan tentang sifat-sifat yang terkait dengan matriks idempoten dapat disimpulkan bahwa:

1. Sifat-sifat matriks idempoten terkait dengan matriks lainnya yaitu:
  - a. Misalkan  $A$  adalah matriks idempoten berukuran  $n \times n$ . Maka, untuk sebarang matriks nonsingular  $B$  berukuran  $n \times n$ , maka  $B^{-1}AB$  adalah idempoten.
  - b. Jika  $A$  adalah matriks idempoten yang simetris, maka  $I - 2A$  adalah ortogonal.
  - c. Misalkan  $A$  matriks berukuran  $n \times n$ . Maka berlaku,  $\frac{1}{2}(I + A)$  adalah matriks idempoten jika dan hanya jika  $A$  adalah matriks involutory.
  - d. Misalkan  $A$  dan  $B$  adalah matriks simetris yang idempoten. Jika  $C(A) = C(B)$  maka  $A = B$ .
  - e. Misalkan  $A$  matriks berukuran  $m \times n$ . Maka  $A^+A$  yang merupakan matriks berukuran  $n \times n$  dan  $AA^+$  yang berukuran  $m \times m$ , keduanya adalah matriks idempoten.
2. Sifat-sifat ruang null, ruang kolom, rank dan trace dari matriks idempoten.

a. Untuk sebarang matriks idempoten  $A$  berukuran  $n \times n$ , maka

$$rk(A) = tr(A).$$

b. Misalkan  $A$  matriks berukuran  $n \times n$ . Maka berlaku,  $N(A) = C(I - A)$  jika dan hanya jika  $A$  adalah matriks idempoten.

c. Misalkan  $A$  matriks berukuran  $n \times n$ . Maka berlaku,  $C(A) = N(I - A)$  jika dan hanya jika  $A$  adalah matriks idempoten.

d. Misalkan  $A$  suatu matriks berukuran  $n \times n$ .  $A$  matriks idempoten jika dan hanya jika  $rk(A) + rk(I - A) = n$ .

e. Misalkan  $A$  matriks berukuran  $m \times n$ . Maka

(a.)  $rk(A^+A) = tr(A^+A)$  dan  $rk(AA^+) = tr(AA^+)$ .

(b.)  $rk(I - A^+A) = tr(I - A^+A) = n - rk(A^+A)$ .

(c.)  $rk(I - AA^+) = tr(I - AA^+) = m - rk(AA^+)$ .

f. Misalkan  $A_1, \dots, A_k$  matriks berukuran  $n \times n$  dan misalkan  $A = A_1 + \dots + A_k$  dan  $A$  adalah matriks idempoten. Maka, pernyataan berikut ekuivalen.

(a.)  $A_i A_j = \mathbb{O}$  untuk  $j \neq i = 1, \dots, k$  dan  $rk(A_i^2) = rk(A_i)$  untuk  $i = 1, \dots, k$ .

(b.)  $A_i^2 = A_i$  untuk  $i = 1, \dots, k$ .

(c.)  $rk(A_1) + \dots + rk(A_k) = rk(A)$ .