BAB IV

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan dalam tugas akhir ini dapat disimpulkan bahwa:

(1) Sifat-sifat dasar operasi Hadamard, yaitu:

(a) Untuk matriks A, B dan C yang berukuran $m \times n$, dengan entri-entri pada bilangan riil atau kompleks berlaku:

(a) $A \odot B = B \odot A$ (sifat komutatif),

(b) $(A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C)$ (sifat asosiatif),

(c) $(A + B) \odot C = A \odot C + B \odot C$ (sifat distributif kanan),

(d) $(A \odot B)^T = A^T \odot B^T$ (sifat transpos),

(e) $A \odot (O) = (O)$ (sifat perkalian dengan matriks nol),

(f) $A \odot \boldsymbol{1}_m \cdot \boldsymbol{1}_n^T = A$, dengan $\boldsymbol{1}_m$ dan $\boldsymbol{1}_n$ adalah vektor berukuran $m \times 1$ dan $n \times 1$, dengan semua entri adalah 1,

(g) Jika $m = n$, $A \odot I_m = D_A = diag(a_{11}, A_{22}, \cdots, a_{mm})$, dengan I_m adalah matriks identitas berukuran $m \times m$,

(h) $C \cdot (A \odot B) = (C \cdot A) \odot B = A \odot (C \cdot B)$ dan $(A \odot B) \cdot C = (A \cdot C) \odot B = A \odot (B \cdot C)$, jika $m = n$ dan C adalah matriks diagonal,

(i) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^T\odot\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}^T=(\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}\odot\boldsymbol{d})^T$, dengan $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{c}$ adalah vektor $m\times 1$, $\boldsymbol{b}$ dan $\boldsymbol{d}$ adalah vektor $n\times 1$.

(b) Untuk matriks A dan B yang berukuran $m\times n$, $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ masing-masing adalah vektor $m\times 1$ dan $n\times 1$ berlaku:

(i) $\mathbf{1}_m^T\cdot(A\odot B)\cdot\mathbf{1}_n=tr(A\cdot B^T)$,

(ii) $\mathbf{x}^T\cdot(A\odot B)\cdot\mathbf{y}=tr(D_{\boldsymbol{x}}\cdot A\cdot D_{\boldsymbol{y}}\cdot B^T)$, dengan $D_{\boldsymbol{x}}=diag(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ dan $D_{\boldsymbol{y}}=diag(y_1,y_2,\cdots,y_n)$.

(2) Berikut ini adalah beberapa perbedaan antara operasi perkalian biasa dengan operasi Hadamard pada matriks, yaitu:

(a) Perkalian biasa pada matriks A dan B yang dinyatakan oleh $A\cdot B$ dapat dioperasikan jika jumlah kolom dari matriks A sama dengan jumlah baris dari matriks B. Sedangkan operasi Hadamard pada matriks A dan B yang dinyatakan oleh $A\odot B$ dapat dioperasikan jika kedua matriks A dan B memiliki ukuran yang sama.

(b) Suatu matriks A dan B dapat dioperasikan dengan operasi Hadamard dan perkalian biasa pada matriks jika dan hanya jika kedua matriks tersebut adalah matriks bujursangkar yang berukuran sama.

(c) Suatu matriks A yang berukuran $n\times n$ dan I_n adalah matriks identitas yang berukuran $n\times n$ dapat dioperasikan dengan operasi Hadamard dan perkalian biasa pada matriks, sedemikian sehingga $A\odot I_n=D_A$, dimana D_A adalah matriks diagonal dari A dan $A\cdot I_n=A$.

(d) Sifat transpos perkalian biasa pada matriks berbeda dengan sifat transpos pada operasi Hadamard, yaitu $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ dan $(A \odot B)^T = A^T \odot B^T$.

(e) Sifat komutatif berlaku pada operasi Hadamard, sedangkan pada operasi perkalian biasa pada matriks sifat komutatif tidak berlaku.

(3) Sifat-sifat operasi Hadamard terhadap definit positif dan definit taknegatif, yaitu:

(a) Jika A dan B matriks simetri $m \times m$, maka berlaku:

(i) $A \odot B$ adalah definit taknegatif, jika A dan B juga definit taknegatif,

(ii) $A \odot B$ adalah definit positif, jika A dan B juga definit positif.

(b) Misalkan A dan B matriks simetri $m \times m$. Jika B adalah definit positif dan A adalah definit taknegatif dengan elemen diagonal positif, maka $A \odot B$ adalah definit positif.

(c) Jika A dan B matriks definit taknegatif $m \times m$, maka:

$$|A| \prod_{i=1}^{m} b_{ii} \leq |A \odot B|.$$