BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Pada tugas akhir ini diperoleh bilangan kromatik lokasi graf thorn dari graf Jahangir, yang dinotasikan dengan $Th(J_{2n+1}(l_1, l_2, \ldots, l_{2n+1}))$. Graf thorn dari graf Jahangir diperoleh dengan menghubungkan l_i titik baru berderajat 1 ke titik v_i dari graf J_{2n+1} dimana $i = 1, 2, \ldots, 2n + 1$ dan $n \geq 3$.

Misalkan $l_{maks} = max\ \{l_1, l_2, \ldots, l_{2n+1}\}$, r, s, a_z dan $|v_{(j)}|$ berturut-turut adalah banyaknya warna yang diberikan, banyaknya kemungkinan pewarnaan yang terjadi, barisan sesuai dengan Tabel 3.0.1 untuk $z = 1, 2, 3, \ldots$ *atau* y, dan banyaknya titik yang bertetangga dengan j daun untuk $j = l_{maks}, l_{maks-1}, \ldots, 2$. Jika $s = r\sum_{z=1}^{y} a_z$ dan $s \geq |v_j|$ untuk $j = l_{maks}, l_{maks-1}, \ldots, 2$ maka $\chi_L(Th(J_{2n+1}(l_1, l_2, \ldots, l_{2n+1}))) = r$, dengan $r = l_{maks} + z$.

4.2 Masalah Terbuka

Dalam tugas akhir ini belum ditemukan pola yang sesuai untuk penentuan bilangan kromatik lokasi graf $Th(J_{2n+1}(l_1, l_2, \ldots, l_{2n+1}))$ dengan $l_i = 1$ untuk *1*

$\leq i \leq 2n + 1$ dan $n \geq 3$. Jika dilakukan pewarnaan dengan langkah yang telah dibahas pada BAB III, maka didapatkan persamaan berikut.

$$\text{r} = 2, \text{ maka s} = 2 \times (1) = 2 \times 1 = 2$$

$$\text{r} = 3, \text{ maka s} = 3 \times (1 + 1) = 3 \times 2 = 6$$

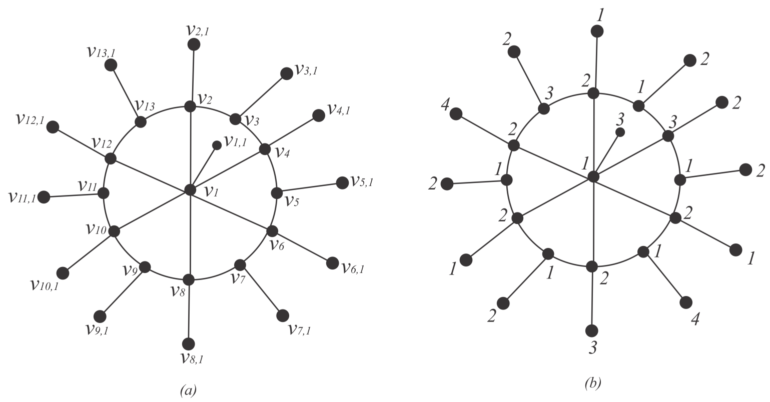
$$\text{r} = 4, \text{ maka s} = 4 \times (1 + 1 + 1) = 4 \times 3 = 12$$

$$\text{r} = 5, \text{ maka s} = 5 \times (1 + 1 + 1 + 1) = 5 \times 4 = 20$$

$$\vdots$$

Selanjutnya dicari hubungan antara r, s, n dan $\chi_L(Th(J_{2n+1}(l_1, l_2, \ldots, l_{2n+1})))$. Karena s adalah banyaknya kemungkinan pewarnaan untuk v_i dengan warna yang diberikan adalah sebanyak r, maka dengan r warna tersebut, dapat diwarnai sebanyak s titik pada graf J_{2n+1} dengan $l_i = 1$. Dengan kata lain, jika $s \geq 2n + 1$ dan r merupakan banyaknya warna minimum yang dibutuhkan agar setiap titik v_i memiliki kode warna yang berbeda maka $\chi_L(Th(J_{2n+1}(l_1, l_2, \ldots, l_{2n+1}))) \geq r$.

Perhatikan contoh di bawah ini. Akan ditentukan $\chi_L(Th(J_{13}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)))$.



Gambar 4.2.1: (a) Graf Th(J_{13}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)), (b) Kode warna pada setiap titik graf Th(J_{13}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1))

Perhatikan bahwa $l_{maks} = 1$ maka periksa nilai r dan s untuk $l = 1$.

Untuk $z = 1$ maka $r = 1 + 1 = 2$. $s = 2 \times 1 = 2$. Karena $s < |v_{(lmaks)}| < 2n + 1 < 13$ maka akan ada minimal dua titik dengan kode warna yang sama, sehingga warna yang diberikan harus ditambah.

Untuk $z = 2$ maka $r = 1 + 2 = 3$. $s = 3 \times 2 = 6$. Karena $s < |v_{(lmaks)}| < 2n + 1 < 13$ maka akan ada minimal dua titik dengan kode warna yang sama, sehingga warna yang diberikan harus ditambah.

Untuk $z = 3$ maka $r = 1 + 3 = 4$. $s = 4 \times 3 = 12$. Karena $s < |v_{(lmaks)}| < 2n + 1 < 13$ maka akan ada minimal dua titik dengan kode warna yang sama, sehingga warna yang diberikan harus ditambah.

Untuk $z = 4$ maka $r = 1 + 4 = 5$. $s = 4 \times 5 = 20$. Karena $s \geq |v_{(lmaks)}| \geq 2n + 1 \geq 13$ maka perhitungan dihentikan dan diperoleh $r = 5$. Sehingga $\chi_L(Th(J_{13}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1))) \geq 5$.

Selanjutnya, bagi setiap titik tersebut ke dalam kelas warna berikut :

$C_1 = \{v_1, v_{2,1}, v_3, v_4, v_{6,1}, v_7, v_9, v_{10,1}, v_{11}\}$

$C_2 = \{v_2, v_{3,1}, v_{4,1}, v_{5,1}, v_6, v_8, v_{9,1}, v_{10}, v_{11,1}, v_{12}, v_{13,1}\}$

$C_3 = \{v_{1,1}, v_4, v_{8,1}, v_{13}\}$

$C_4 = \{v_{7,1}, v_{12,1}\}$,

sehingga kode warna dari setiap titik pada graf tersebut terhadap $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ adalah :

$$
\begin{aligned}
c_\Pi(v_1) &= (d(v_1, C_1), d(v_1, C_2), d(v_1, C_3), d(v_1, C_4)) \\
&= (0, 1, 1, 2) \\
c_\Pi(v_{2,1}) &= (d(v_{2,1}, C_1), d(v_{2,1}, C_2), d(v_{2,1}, C_3), d(v_{2,1}, C_4)) \\
&= (0, 1, 2, 4) \\
c_\Pi(v_3) &= (d(v_3, C_1), d(v_3, C_2), d(v_3, C_3), d(v_3, C_4)) \\
&= (0, 1, 1, 4) \\
c_\Pi(v_5) &= (d(v_5, C_1), d(v_5, C_2), d(v_5, C_3), d(v_5, C_4)) \\
&= (0, 1, 3, 3) \\
c_\Pi(v_{6,1}) &= (d(v_{6,1}, C_1), d(v_{6,1}, C_2), d(v_{6,1}, C_3), d(v_{6,1}, C_4)) \\
&= (0, 1, 3, 3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_\Pi(v_7) &= (d(v_7,C_1),d(v_7,C_2),d(v_7,C_3),d(v_7,C_4)) \\
&= (0,1,2,1) \\
c_\Pi(v_9) &= (d(v_9,C_1),d(v_9,C_2),d(v_9,C_3),d(v_9,C_4)) \\
&= (0,1,2,3) \\
c_\Pi(v_{10,1}) &= (d(v_{10,1},C_1),d(v_{10,1},C_2),d(v_{10,1},C_3),d(v_{10,1},C_4)) \\
&= (0,1,3,4) \\
c_\Pi(v_{11}) &= (d(v_{11},C_1),d(v_{11},C_2),d(v_{11},C_3),d(v_{11},C_4)) \\
&= (0,1,2,2) \\
c_\Pi(v_2) &= (d(v_2,C_1),d(v_2,C_2),d(v_2,C_3),d(v_2,C_4)) \\
&= (1,0,1,3) \\
c_\Pi(v_{3,1}) &= (d(v_{3,1},C_1),d(v_{3,1},C_2),d(v_{3,1},C_3),d(v_{3,1},C_4)) \\
&= (1,0,2,5) \\
c_\Pi(v_{4,1}) &= (d(v_{4,1},C_1),d(v_{4,1},C_2),d(v_{4,1},C_3),d(v_{4,1},C_4)) \\
&= (2,0,1,4) \\
c_\Pi(v_{5,1}) &= (d(v_{5,1},C_1),d(v_{5,1},C_2),d(v_{5,1},C_3),d(v_{5,1},C_4)) \\
&= (1,0,2,4) \\
c_\Pi(v_6) &= (d(v_6,C_1),d(v_6,C_2),d(v_6,C_3),d(v_6,C_4)) \\
&= (1,0,2,2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{\Pi}(v_8) &= (d(v_8, C_1), d(v_8, C_2), d(v_8, C_3), d(v_8, C_4)) \\
&= (1, 0, 1, 2) \\
c_{\Pi}(v_{9,1}) &= (d(v_{9,1}, C_1), d(v_{9,1}, C_2), d(v_{9,1}, C_3), d(v_{9,1}, C_4)) \\
&= (1, 0, 3, 4) \\
c_{\Pi}(v_{10}) &= (d(v_{10}, C_1), d(v_{10}, C_2), d(v_{10}, C_3), d(v_{10}, C_4)) \\
&= (1, 0, 2, 3) \\
c_{\Pi}(v_{11,1}) &= (d(v_{11,1}, C_1), d(v_{11,1}, C_2), d(v_{11,1}, C_3), d(v_{11,1}, C_4)) \\
&= (1, 0, 3, 3) \\
c_{\Pi}(v_{12}) &= (d(v_{12}, C_1), d(v_{12}, C_2), d(v_{12}, C_3), d(v_{12}, C_4)) \\
&= (1, 0, 1, 1) \\
c_{\Pi}(v_{13,1}) &= (d(v_{13,1}, C_1), d(v_{13,1}, C_2), d(v_{13,1}, C_3), d(v_{13,1}, C_4) \\
&= (3, 0, 1, 3) \\
c_{\Pi}(v_{1,1}) &= (d(v_{1,1}, C_1), d(v_{1,1}, C_2), d(v_{1,1}, C_3), d(v_{1,1}, C_4)) \\
&= (1, 2, 0, 3) \\
c_{\Pi}(v_4) &= (d(v_4, C_1), d(v_4, C_2), d(v_4, C_3), d(v_4, C_4)) \\
&= (1, 1, 0, 3) \\
c_{\Pi}(v_{8,1}) &= (d(v_{8,1}, C_1), d(v_{8,1}, C_2), d(v_{8,1}, C_3), d(v_{8,1}, C_4)) \\
&= (2, 1, 0, 3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{\Pi}(v_{13}) &= (d(v_{13}, C_1), d(v_{13}, C_2), d(v_{13}, C_3), d(v_{13}, C_4)) \\
&= (1, 2, 0, 3) \\
c_{\Pi}(v_{7,1}) &= (d(v_{7,1}, C_1), d(v_{7,1}, C_2), d(v_{7,1}, C_3), d(v_{7,1}, C_4)) \\
&= (1, 3, 2, 0) \\
c_{\Pi}(v_{12,1}) &= (d(v_{12,1}, C_1), d(v_{12,1}, C_2), d(v_{12,1}, C_3), d(v_{12,1}, C_4)) \\
&= (2, 1, 2, 0)
\end{aligned}
$$

Diperoleh kode warna dari semua titik pada graf tersebut berbeda maka $\chi_L(Th(J_{13}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1))) \leq 4$. Perhatikan bahwa $\chi_L(Th(J_{13}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1))) \geq 5$ dan $\chi_L(Th(J_{13}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1))) \leq 4$ sehingga untuk $l_i = 1$ pola tersebut tidak berlaku.