BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori matriks merupakan salah satu cabang ilmu aljabar linier yang menjadi pembahasan penting dalam ilmu matematika. Persamaan dalam bentuk matriks dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai persoalan. Misalnya dalam menyelesaikan sistem persamaan linier, persamaan diferensial, numerik, dan lain sebagainya. Matriks sama dengan variabel biasa, dapat dikalikan, dijumlahkan, dikurangkan, dan didekomposisikan. Dengan representasi matriks, perhitungan dapat dilakukan dengan lebih terstruktur.

Sebuah matriks dikatakan mempunyai invers jika matriks tersebut bujursangkar dan *nonsingular*. Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$ dan terdapat matriks A^{-1} sedemikian sehingga $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, maka A disebut invertibel dan A^{-1} disebut invers dari matriks A [1].

Pada tahun 1920 E.H Moore mendeskripsikan salah satu jenis invers matriks yang dikenal dengan nama generalisasi invers. Generalisasi invers merupakan perluasan dari konsep invers matriks, dimana invers matriks tidak lagi hanya untuk matriks yang nonsingular. Kemudian pada tahun 1955 Roger Penrose berhasil mendeskripsikan empat persamaan yang harus dipenuhi untuk menentukan generalisasi invers [2]. Persamaan tersebut dikenal sebagai persamaan Penrose. Empat persamaan tersebut adalah sebagai berikut :

$$AXA = A, \tag{1.1.1}$$

$$XAX = X, \tag{1.1.2}$$

$$(AX)^* = AX, \tag{1.1.3}$$

$$(XA)^* = XA, \tag{1.1.4}$$

dimana A^* adalah konjugat transpose dari matriks A. Generalisasi invers X yang memenuhi keempat persamaan Penrose dinamakan dengan Invers Moore-Penrose dan dinotasikan dengan $X = A^\dagger$ [1]. Sedangkan generalisasi invers yang memenuhi beberapa persamaan Penrose tetap dinamakan sebagai generalisasi invers. Sebagai contoh untuk X yang memenuhi persamaan (1.1.1) dan (1.1.2) maka $X = \{1,2\}$-invers dan $X = A^{(1,2)}$. Dalam tesis ini menggunakan persamaan Penrose yang memenuhi persamaan $AXA = A$ untuk menentukan $\{1\}$-invers.

Dalam aljabar linier dikenal suatu sistem persamaan linier dalam bentuk $AX = B$. Sistem ini mempunyai syarat-syarat tertentu agar mempunyai solusi [1]. Jika diberikan sebarang matriks berukuran $m \times n$, maka solusi sistem tidak dapat ditentukan. Untuk itu pada tesis ini dikaji konsep penentuan solusi dari suatu sistem persamaan linier $AXB + CYD = E$ untuk kasus dimana matriks A, B, C, D tidak hanya bujursangkar.

Misalkan diberikan matriks $A \in \mathfrak{M}_{m,n}, B \in \mathfrak{M}_{p,q}, C \in \mathfrak{M}_{m,r}, D \in \mathfrak{M}_{s,q}, E \in \mathfrak{M}_{m,q}$. Selanjutnya akan ditentukan solusi dari

$$AXB + CYD = E, \tag{1.1.5}$$

dimana $\{1\}$-invers dari masing-masing matriks A, B, C, D memenuhi persamaan (1.1.1). Pada tesis ini akan dikaji tentang solusi X dan Y dari persamaan (1.1.5) tersebut.

1.2 Perumusan Masalah

Misalkan terdapat $A \in \mathfrak{M}_{m,n}, B \in \mathfrak{M}_{p,q}, C \in \mathfrak{M}_{m,r}, D \in \mathfrak{M}_{s,q}, E \in \mathfrak{M}_{m,q}$. Jika diberikan persamaan matriks dalam bentuk $AXB + CYD = E$, maka bagaimanakah menentukan solusi dari persamaan matriks $AXB+CYD = E$.

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian pada tesis ini adalah menunjukkan bagaimana cara menentukan solusi dari persamaan matriks $AXB + CYD = E$.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memperluas wawasan penulis serta pembaca pada umumnya dan diharapkan dapat memberikan sumbangan kepada para pembaca agar lebih memahami tentang solusi umum dari sistem linier khususnya untuk persamaan matriks linier $AXB + CYD = E$.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut : Bab I Pendahuluan memberikan gambaran singkat tentang latar belakang, perumusan masalah, tujuan penelitian, serta manfaat penelitian. Bab II Landasan Teori yang membahas mengenai teori-teori sebagai dasar acuan yang digunakan dalam pembahasan dan mendukung masalah yang dibahas. Bab III Hasil dan Pembahasan yang akan memaparkan tentang solusi persamaan matriks $AXB + CYD = E$ dan syarat perlu dan syarat cukup untuk persamaan matriks $AXB + CYD = E$. Bab IV Kesimpulan dari hasil pembahasan.