BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang menarik untuk dikaji. Teori graf dapat diaplikasikan kedalam berbagai disiplin ilmu maupun dalam kehidupan sehari-hari. Graf digunakan untuk memodelkan persoalan. Kirchoff (1847) menggunakan graf untuk memodelkan rangkaian listrik [9]. Berdasarkan graf tersebut Kirchoff menurunkan persamaan arus yang masuk dan keluar pada tiap titik. Arthur Cayley (1857) menggunakan graf dalam memodelkan molekul senyawa alkana C_nH_{2n+2} untuk menghitung jumlah isomernya [9]. Atom karbon (C) dan atom Hidrogen (H) dinyatakan sebagai titik sedangkan ikatan antara atom C dan H dinyatakan sebagai sisi.

Secara umum, graf G adalah pasangan himpunan V dan E, dituliskan $G = (V, E)$, dengan V adalah suatu himpunan titik (*vertex*) yang tidak kosong dan E adalah himpunan sisi (*edge*) yang terdiri dari pasangan terurut dari titik-titik berbeda dari V. Misalkan $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ adalah himpunan titik yang berisi n titik di G dan $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ adalah himpunan sisi yang berisi m sisi di G. Secara umum, sisi dapat ditulis dengan v_iv_j atau v_jv_i.

Sejalan dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi saat ini, banyak sekali penelitian terbaru tentang graf, antara lain dimensi metrik, dimensi partisi, pewarnaan lokasi, *rainbow connection number*, pelabelan titik, pelabelan sisi dan lain-lain. Perkembangan teori graf telah banyak memberikan masukan kepada ilmu baru. Diantaranya adalah dimensi metrik dan dimensi partisi.

Dimensi metrik diperkenalkan oleh Harary dan Melter [3]. Misalkan terdapat graf terhubung G. Misalkan u dan v adalah titik-titik dari graf G. Jarak antara u dan v, dinotasikan $d(u, v)$, adalah panjang lintasan terpendek antara kedua titik tersebut di G. Misalkan terdapat himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, ..., w_k\} \subset V(G)$. Representasi titik v terhadap W didefinisikan sebagai jarak dari v ke tiap-tiap elemen di W, ditulis

$$r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), ..., d(v, w_k))$$

W dinamakan himpunan penyelesaian untuk G jika $r(u|W) = r(v|W)$ maka $u = v$ untuk setiap dua titik u dan v di G. Kardinalitas minimum dari himpunan penyelesaian dinamakan dimensi metrik dari G, dinotasikan $dim(G)$ [6].

Chartrand dkk. [6] menentukan sifat-sifat graf terhubung G dengan $dim(G) = 1$, $dim(G) = n - 1$, dan $dim(G) = n - 2$. Dalam makalah yang sama, diperoleh dimensi metrik dari graf lingkaran C_n , graf pohon sebarang T , serta batas untuk dimensi metrik dari graf *unicyclic*, yaitu graf yang memuat tepat satu siklus. Beberapa hasil lainnya antara lain adalah penentuan dimensi metrik dari graf kipas oleh Caceres dkk. [8], graf roda oleh Shanmukha dkk. [1] dan graf *unicyclic* oleh Poisson dan Zhang [2].

Dimensi metrik dapat digunakan untuk pembahasan pada bidang lain seperti kimia, navigasi robot dan optimasi kombinasi. Setelah ditentukan dimensi metrik dari suatu graf, kita dapat menentukan dimensi partisi dari graf tersebut menggunakan teorema tentang hubungan dimensi partisi dengan dimensi metrik. Chartrand [5] telah membahas hubungan dimensi partisi dan dimensi metrik, yaitu batas atas dimensi partisi graf $G, pd(G)$ adalah $dim(G)+1$.

Berikut penjelasan dimensi partisi suatu graf G, dinotasikan $pd(G)$. Misalkan $G = (V, E)$ suatu graf dan $S \subseteq V(G)$. Jarak dari titik v ke himpunan S, dinotasikan dengan $d(v, S)$, adalah min $\{d(v, x), x \in S\}$ de-ngan $d(v, x)$ adalah jarak dari titik v ke x. Definisikan $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$ sebagai himpunan yang berisikan k-partisi tersebut. Misal terdapat titik $v \in V(G)$, maka representasi dari v terhadap Π didefinisikan dengan $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), ..., d(v, S_k))$. Jika setiap titik di G mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π, maka Π disebut partisi pembeda *(resolving partition)*. Kardinalitas minimum dari partisi pembeda disebut dimensi partisi dari G, ditulis $pd(G)$ [5]. Dimensi partisi suatu graf berguna untuk menentukan batas atas dari bilangan kromatik lokasi.

Chartrand, Salehi dan Zhang [4] menentukan dimensi partisi dari suatu graf yang berada dalam kelas graf pohon, yaitu graf ulat dan graf bintang ganda. Chartrand dkk [4] telah menentukan dimensi partisi dari sebarang graf pohon secara lengkap. Selanjutnya, Chartrand, Salehi dan Zhang [5] mengkarakterisasi semua graf G orde n dengan dimensi partisi 2, yaitu $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika G adalah graf lintasan P_n.

Fitrianda [11] membuat graf baru yaitu graf tangga segitiga yang diperumum. Kemudian menentukan *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* dari graf tersebut.

Penulis tertarik untuk menentukan dimensi metrik dan dimensi partisi dari graf tangga segitiga yang diperumum, karena dimensi metrik dan dimensi partisi dari graf tangga segitiga yang diperumum belum ditentukan. Dengan demikian penulis merumuskan judul skripsi, yaitu "**Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi dari Graf Tangga Segitiga yang Diperumum**".

1.2 Perumusan Masalah

Pada tugas akhir ini akan dikaji bagaimana cara menentukan dimensi metrik dan dimensi partisi dari suatu graf tangga segitiga yang diperumum Tr_n dengan $n \geq 2$.

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah untuk menentukan dimensi metrik dan dimensi partisi dari suatu graf tangga segitiga yang diperumum Tr_n dengan $n \geq 2$.

1.4 Sistematika Penulisan

Penulisan dalam tugas akhir terdiri dari empat bab. Bab I memuat latar belakang, perumusan masalah, tujuan dan sistematika penulisan. Pada Bab II dijelaskan mengenai landasan teori yang berisi materi dasar dan materi-materi penunjang. Pada Bab III memuat pembahasan tentang penentuan dimensi metrik dan dimensi partisi dari graf tangga segitiga yang diperumum Tr_n. Terakhir, Bab IV adalah penutup yang memuat kesimpulan dari pembahasan masalah. Hasil baru yang diperoleh dalam tugas akhir ini diberikan dalam Teorema dengan tanda $\diamondsuit$.