BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu bagian dari ilmu matematika. Banyak permasalahan yang dapat dinyatakan dan diselesaikan dengan menggunakan teori graf. Keunikan teori graf adalah kesedehanaan pokok bahasan yang dipelajarinya, karena dapat disajikan dengan titik dan sisi. Titik menggambarkan objek-objek tertentu dan sisi menggambarkan hubungan antara objek-objek tersebut. Misalkan graf merepresentasikan bentuk molekul air yang terdiri dari atom hidrogen dan oksigen. Masalah dan solusi yang didapat dari contoh kasus tersebut merupakan teknik dari teori graf, yaitu dengan titik-titik graf menyatakan atom dan sisi-sisi graf menyatakan ikatan antara atom-atom tersebut.

Secara umum, graf G adalah pasangan himpunan V dan E, dituliskan $G = (V, E)$, dimana V adalah suatu himpunan titik (vertex) yang tidak kosong dan E adalah himpunan sisi (edge) yang terdiri dari pasangan terurut dari titik-titik berbeda dari V. Misalkan $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ adalah himpunan titik yang berisi n titik di G dan $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ adalah himpunan sisi yang berisi m sisi di G. Secara umum, sisi dapat ditulis dengan v_iv_j atau v_jv_i. Kardinalitas dari himpunan $V(G)$ disebut *orde* dari G dan kardinalitas dari himpunan $E(G)$ disebut *ukuran (size)* dari G.

Seiring dengan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi banyak sekali penelitian terbaru mengenai graf. Hal ini disebabkan oleh manfaat teori graf yang sangat luas, dapat dikatakan bahwa semua cabang ilmu lain dapat memanfaatkannya. Mulai dari jenis-jenis graf, dimensi partisi, pewarnaan lokasi dan masih banyak lagi. Perkembangan teori graf telah banyak memberikan masukan, salah satunya adalah pewarnaan graf.

Pewarnaan graf diyakini pertama kali muncul sebagai masalah pewarnaan peta, dimana warna setiap daerah pada peta yang berbatasan dibuat berlainan sehingga mudah untuk dibedakan. Masalah pewarnaan graf juga memiliki banyak aplikasi di dalam bidang lain. Salah satunya adalah pembuatan suatu jadwal, yang bertujuan agar waktu dan tempat yang sudah diatur sedemikian mungkin tidak saling tumpang tindih. Pewarnaan graf memiliki sejarah yang sangat menarik dan teori-teorinya telah menimbulkan banyak perdebatan pada kalangan matematikawan. Pewarnaan graf terdiri dari pewarnaaan titik dan pewarnaan sisi.

Pewarnaan k-sisi untuk G adalah pemberian k warna pada sisi-sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi yang bertemu pada titik yang sama mempunyai warna berbeda. Pewarnaan titik pada graf adalah pemberian warna untuk setiap titik pada graf sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga berwarna sama. Banyaknya warna minimal yang dipakai untuk pewarnaan graf disebut bilangan kromatik dari graf G dan disimbolkan dengan $\chi(G)$.

Chartrand dkk. mendefinisikan bilangan kromatik lokasi sebagai berikut ; Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan c suatu pewarnaan-k dari G. Misalkan pula $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$ merupakan partisi dari $V(G)$ yang diinduksi oleh pewarnaan c. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari v adalah koordinat $(d(v, S_1), d(v, S_2), ..., d(v, S_k))$ dengan,

$$d(v, S_i) = min\{d(v, x)|x \in S_i\} \text{ untuk } 1 \leq i \leq k.$$

Jika semua titik di G mempunyai kode warna berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi. Bilangan kromatik lokasi dari G dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Bilangan kromatik lokasi adalah minimum dari banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi. Jelas, bahwa graf berorde satu mempunyai bilangan kromatik satu, sedangkan graf berorde dua mempunyai bilangan kromatik lokasi dua. Secara umum jika G berorde $n \geq 3$, maka $\chi_L(G) \geq 3$.

Kajian tentang pewarnaan lokasi adalah suatu kajian yang cukup baru dalam bidang teori graf. Konsep pewarnaan lokasi pertama kali dikaji oleh Chartrand dkk. [3] pada tahun 2002 dengan menentukan bilangan kromatik lokasi dari beberapa graf yaitu : (i) untuk graf lintasan P_n dengan $n \geq 3$ diperoleh $\chi_L(P_n) = 3$; (ii) graf siklus diperoleh $\chi_L(C_n) = 3$ untuk n ganjil atau $\chi_L(C_n) = 4$ untuk n genap. Selanjutnya, juga diperoleh bilangan kromatik lokasi untuk graf multipartit lengkap dan graf bintang ganda. Pada tahun 2003, Chartrand dkk. [4] mengkarakterisasi graf orde n dengan bilangan kromatik lokasi $n-1$. Karena masih sedikit bilangan kromatik lokasi yang diketahui, maka topik bilangan kromatik lokasi menarik untuk dikaji lebih lanjut. Untuk itu akan dibahas penentuan bilangan kromatik lokasi pada graf berlian, dinotasikan Br_n untuk $n \geq 3$.

1.2 Perumusan Masalah

Masalah yang akan dikaji dalam tugas akhir ini adalah bagaimana menentukan *bilangan kromatik lokasi* dari graf berlian Br_n, untuk $n = 3$ dan $n = 4$ dan menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi dari graf berlian Br_n, untuk $5 \leq n \leq 16$. Untuk penentuan bilangan kromatik lokasi dari graf berlian Br_n, untuk $n \geq 17$ dan penentuan batas bawah bilangan kromatik lokasi untuk graf berlian Br_n, dengan $5 \leq n \leq 16$ diberikan sebagai masalah terbuka.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf berlian Br_n untuk $3 \leq n \leq 16$.

1.4 Sistematika Penulisan

Penulisan dalam tugas akhir dibagi menjadi empat bab. Bab I sebagai ulasan tentang pendahuluan yang memuat latar belakang, perumusan masalah, tujuan dan sistematika penulisan. Pada bab ini diberikan perkembangan penelitian bilangan kromatik lokasi suatu graf. Pada Bab II dijelaskan mengenai landasan teori tentang konsep dasar dari teori graf berupa definisi graf berlian, bilangan kromatik lokasi dan juga dicantumkan beberapa teorema pendukung. Pada Bab III memuat hasil-hasil penelitian dalam tugas akhir ini. Pada bab ini dibahas tentang bilangan kromatik lokasi pada graf berlian. Terakhir, Bab IV adalah kesimpulan dari pembahasan masalah.