. .

# BAB I

# LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diuraikan beberapa teori yang berkaitan dengan bahasan topik pada skripsi.

## 1.1 Deret Taylor

Deret Taylor dalam matematika adalah representasi fungsi matematika sebagai jumlah tak hingga dari suku-suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut disuatu titik.

**Teorema 1.1.1. (Teorema Taylor)**[?] *Misalkan* $n \in \mathbb{N}$, $I = [a, b]$, *dan* $f : I \to \mathbb{R}$ *sedemikian sehingga* $f', f'', ..., f^{(n)}$ *kontinu di* $I$ *dan* $f^{(n+1)}$ *ada pada* $(a, b)$*. Jika* $x_0 \in I$*, maka untuk setiap* $x$ *di* $I$ *terdapat suatu titik* $c$ *di antara* $x$ *dan* $x_0$ *sedemikian sehingga*

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x), \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

*dimana*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{1.1.2}$$

*dan*

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n}{(x - a)^n} = 0. \tag{1.1.3}$$

**Bukti.** Misalkan $x_0$ dan $x$ diberikan dan misalkan $J$ adalah suatu interval tertutup dengan titik-titik ujungnya $x_0$ dan $x$. Definisikan fungsi $F$ di $J$, yaitu

$$F(\tilde{x}) = f(x) - f(\tilde{x}) - (x-\tilde{x})f'(\tilde{x}) - ... - \frac{(x-\tilde{x})^n}{n!}f^{(n)}(\tilde{x}) \qquad (1.1.4)$$

untuk $\tilde{x} \in J$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} F'(\tilde{x}) &= -f'(\tilde{x}) - [-f'(\tilde{x}) + (x-\tilde{x})f''(\tilde{x})] - \frac{1}{2}[-2(x-\tilde{x})f''(\tilde{x}) + (x-\tilde{x})^2 f'''(\tilde{x})] \\ &\quad - ... - \frac{1}{n!}[-n(x-\tilde{x})^{n-1}f^n(\tilde{x}) + (x-\tilde{x})^n f^{(n+1)}(\tilde{x})] \\ &= -\frac{(x-\tilde{x})^n}{n!}f^{(n+1)}(\tilde{x}). \end{aligned}$$

Dengan mendefinisikan

$$G(\tilde{x}) = F(\tilde{x}) - \left(\frac{x-\tilde{x}}{x-x_0}\right)^{n+1} F(x_0),$$

untuk $x \in J$, maka $G(x_0) = G(x) = 0$. Dengan demikian terdapat $c$ di antara $x_0$ dan $x$ sedemikian sehingga

$$G'(c) = F'(c) + (n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}}F(x_0) = 0.$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} F(x_0) &= -\frac{F'(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-c)^n} \\ &= -\frac{(x-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-c)^n} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Dengan menetapkan nilai $\tilde{x} = x_0$ pada persamaan (1.1.4) dan melakukan perhitungan aljabar, diperoleh hasil yang diinginkan. ■

Jika fungsi $f$ memiliki turunan dari semua orde di titik $x_0$ dalam $\mathbb{R}$, persamaan (1.1.1) dapat ditulis

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{1.1.5}$$

Persamaan (1.1.5) dikenal sebagai deret Taylor untuk $f(x)$ di $x \approx x_0$. Kekonvergenan deret Taylor (1.1.5) dijamin oleh suku sisa $R_n(x)$ yang menuju ke 0 untuk setiap $x$ di interval $\{x : |x - x_0| < R\}$, dimana $R$ menyatakan radius kekonvergenan.

Jika ditulis $x = x_0 + h$ dan kemudian ganti kembali $x_0$ dengan $x$, persamaan (1.1.1) dapat ditulis menjadi

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f"(x)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + R_n(x), \tag{1.1.6}$$

dimana

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}. \tag{1.1.7}$$

Selanjutnya nyatakan $R_n(x) = \mathcal{O}(h^{n+1})$ (disebut juga dengan galat pemotongan orde $h^{n+1}$).



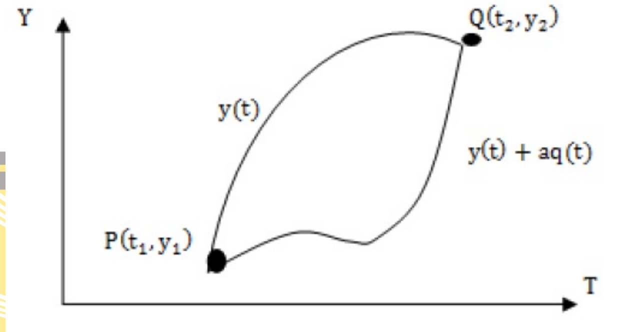
## 1.2 Persamaan *Euler-Lagrange*

Perhatikan persamaan berikut :

$$S[y] = \int_{t_1}^{t_2} F(t, y, y')dt \tag{1.2.8}$$

$$W[y] = \int_{t_1}^{t_2} F(t, u, u')dt \tag{1.2.9}$$

dimana $F$ adalah fungsi yang diferensiabel pada tiga variabel $(t, y, y')$ dan $(t, u, u')$ pada persamaan (1.2.8) dan (1.2.9). Andaikan $y(t)$ adalah sebarang kurva yang melewati dua titik $P(t_1, y_1)$ dan $(t_2, y_2)$ seperti yang diilustrasikan pada gambar(2.2.1):




Gambar 1.2.1: Ilustrasi sebarang kurva yang melewati dua titik

Dari ilustrasi di atas, misalkan bentuk asli pada kurva adalah $y = y(t)$. Andaikan ada variasi kecil yang bisa mengganggu, sehingga kurva berubah bentuk menjadi $y^* = y(t) + aq(t)$, dimana $a$ merupakan konstanta dan $q(t)$ adalah variabel bebas, $y^*(t)$ adalah kurva yang baru, $q(t_1) = 0$ dan $q(t_2) = 0$, mengakibatkan tidak ada variasi di $t$. Ini berarti bahwa

$$y^{*'}(t) = y'(t) + aq'(t).$$

Misalkan ada fungsi baru yang dilambangkan dengan $S^*[y]$

$$S^*[y] = \int_{t_1}^{t_2} F(t, y + aq, y' + aq')dt \tag{1.2.10}$$

dan misalkan variasi pada S dinotasikan sebagai $\partial s$

$$\partial s = S^* - S = \int_{t_1}^{t_2} [F(t, y + aq, y' + aq') - F(t, y, y')]dt \tag{1.2.11}$$

karena t tetap, maka mengakibatkan $F$ dirubah menjadi dua variabel $y$ dan $y'$. Dengan menggunakan deret Taylor yang diberikan oleh

$$F[t+k, y+l] = F(t,y)+(k\frac{\partial}{\partial t}+l\frac{\partial}{\partial y})(F(t,y)+(k\frac{\partial}{\partial t}+l\frac{\partial}{\partial y})2\frac{F(t,y)}{2!}+\cdots \quad (1.2.12)$$

dan dengan mengambil variasi orde pertama dari deret Taylor tersebut, persamaan (1.2.11) menjadi

$$\partial s = a\int_{t_1}^{t_2}[q\frac{\partial F}{\partial y}+q'\frac{\partial F}{\partial y'}]dt \quad (1.2.13)$$

dimana $k = aq$, $l = aq'$.

Untuk $S[y]$ sehingga menjadi stasioner (maksimum atau minimum)

$$\frac{ds}{da}|_{a=0} = 0$$

gunakan

$$\lim_{a\to 0}\frac{\partial s}{\partial a} = \frac{ds}{da}|_{a=0} = 0$$
$$\int_{t_1}^{t_2}[q\frac{\partial F}{\partial y}+q'\frac{\partial F}{\partial y'}]dt = 0$$
$$\int_{t_1}^{t_2}[q\frac{\partial F}{\partial y}]dt + \int_{t_1}^{t_2}q'\frac{\partial F}{\partial y'}]dt = 0.$$

Dengan mengintegralkan integral bagian kedua akan diperoleh

$$\int_{t_1}^{t_2}[q\frac{\partial F}{\partial y}]dt + q\frac{\partial F}{\partial y'} - \int_{t_1}^{t_2}q\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial y'})dt = 0$$

maka

$$\int_{t_1}^{t_2}[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial y'})]q(t)dt = 0. \quad (1.2.14)$$

Karena $q(t)$ merupakan fungsi sebarang, maka persamaan (1.2.14) hanya dipenuhi jika

$$\int_{t_1}^{t_2}[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial y'})]dt = 0. \quad (1.2.15)$$

Dengan menurunkan kedua sisi pada persamaan (1.2.15) menjadi

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial y'}) = 0. \tag{1.2.16}$$

Jika $F = F(t, u, u')$, maka (1.2.16) menjadi

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial u'}) = 0 \tag{1.2.17}$$

persamaan (1.2.16) dan (1.2.17) disebut sebagai persamaan *Euler-Lagrange* [?].

## 1.3 Kalkulus Variasi

Kalkulus variasi terkait dengan masalah ekstrim untuk sebuah fungsi. Masalah kalkulus variasi yang sederhana adalah meminimumkan

$$J(x) = \int_{t_0}^{T} F(t, x, \dot{x})dt \tag{1.3.18}$$

dimana $x(t) \in S = \{x(t) \in C^2([t_0, T] \mid x(t_0) = x_0, x(T) = x_T\}$

dan $C^2([t_0, T])$ adalah himpunan fungsi-fungsi yang turunan keduanya ada dan kontinu pada selang $[t_0, T]$, $t_0$ dan $T$ tetap, $\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}$.

**Teorema 1.3.1. (Teorema Kalkulus Variasi)** [?] *Asumsikan bahwa $F$ adalah $C^2$-fungsi yang terdefinisi di $\mathbb{R}^3$. Maka berdasarkan integral dalam bentuk*

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x})dt. \tag{1.3.19}$$

*Jika sebuah fungsi $x^*$ maksimum atau minimum pada integral di (1.3.19) diantara semua $x \in C^2[t_0, t_1]$ yang memenuhi kondisi titik akhir*

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$$

*maka $x^*$ memenuhi persamaan Euler-Lagrange*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0 \quad (t \in [t_0, t_1]). \tag{1.3.20}$$

*Jika fungsi $(x, \dot{x})$ adalah konkaf (konveks) untuk setiap $t \in [t_0, t_1]$, maka funsi $x^*$ yang memenuhi (1.3.20), menyelesaikan masalah maksimum (minimum).*

Untuk membuktikan Teorema 2.3.2, dibutuhkan

**Lema 1.3.1. (Lemma Kalkulus Variasi)**[?] *Misalkan $C^n[t_0, T]$ adalah himpunan fungsi-fungsi yang dapat diturunan $n$ kali secara kontinu pada selang $[t_0, T]$ dan $h(t)$ kontinu bagian demi bagian dan terbatas di selang $[t_0, T]$*

*jika*

$$\int_{t_0}^{T} h(t)g(t)dt = 0, \qquad \forall g \in C^n[t_0, T]$$

*maka*

$$h(t) = 0, \qquad \forall t \in [t_0, T].$$

**Bukti.** Misalkan $\int_{t_0}^{T} h(t)g(t)dt = 0, \quad \forall g \in C^n[t_0, T]$ tetapi $h(t) \neq 0$ untuk suatu $a \in [t_0, T], h(a) > 0$. Karna $h(t)$ kontinu bagian demi bagian pada $[t_0, T]$ maka terdapat selang $(c, d) \subset [t_0, T]$ sedemikian sehingga $h(t) > 0$ pada $(c, d)$ ambil fungsi $g(t)$ sebagai berikut

$$(g(t)) = \begin{cases} (t-c)(d-t)^{n+1}, t \in (c, d) \\ 0 \qquad\qquad , t \in [t_0, T] \setminus (c, d) \text{ bilangan yang diberikan.} \end{cases} \tag{1.3.21}$$

Jelas bahwa $g \in C^n([t_0, T])$ dan $g(t) > 0$,$t \in (c, d)$

$$\int_{t_0}^{T} h(t)g(t)dt = \int_{t_0}^{c} h(t)g(t)dt + \int_{c}^{d} h(t)g(t)dt + \int_{d}^{T} h(t)g(t)dt$$
$$\int_{t_0}^{T} h(t)g(t)dt = 0 + \int_{c}^{d} h(t)g(t)dt + 0 > 0$$
$$\int_{t_0}^{T} h(t)g(t)dt > 0$$

yang bertentangan dengan hipotesis.

Untuk membuktikan Teorema 2.3.2 dibutuhkan juga

**Proposisi 1.** [?] *misal* $g \in C^2$ *fungsi yang terdefinisi di bujursangkar* $\mathrm{R} = [a,b] \times [c,d] \in \mathbb{R}^2$

$$G(u) = \int_a^b g(t,u)dt \ , \quad u \in [c,d]$$

*maka*

$$G'(u) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial u}(t,u)dt.$$

**Bukti.** Misal $\epsilon > 0$. Karena $\frac{\partial g}{\partial u}$ kontinu, $\frac{\partial g}{\partial u}$ juga kontinu seragam pada R. Oleh karena itu ada $\epsilon > 0$ sehingga

$$|\frac{\partial g}{\partial u}(s,u) - \frac{\partial g}{\partial u}(t,v)| < \frac{\epsilon}{b-a},$$

untuk setiap $(s,u),(t,v)$ di R sehingga $\|(s,u)-(t,v)\| < \epsilon$. Dengan menggunakan teorema nilai rata-rata, ada $\theta = \theta(t,u,v)$ antara $u$ dan $v$ sehingga

$$g(t,v) - g(t,u) = \frac{\partial g}{\partial u}(t,\theta)(v-u).$$

Sebaliknya

$$\begin{aligned} &|\int_a^b [\frac{g(t,v)-g(t,u)}{v-u} - \frac{\partial g}{\partial u}(t,u)]dt| \\ &\leq \int_a^b |\frac{\partial g}{\partial u}(t,\theta) - \frac{\partial g}{\partial u}(t,u)|dt \\ &\leq \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}dt = \epsilon, \quad \text{untuk } |v-u| < \partial. \end{aligned}$$

Akibatnya

$$G'(u) = lim_{v\to u}\frac{G(v)-G(u)}{v-u} = lim_{v\to u}\frac{g(t,v)-g(t,u)}{v-u}dt = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial u}(t,u)dt.$$

**Bukti Teorema 2.3.2** Gunakan kembali masalah maksimum

$$\max_x \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})dt \tag{1.3.22}$$

$$dimana\ x(t_0) = x_0\ dan\ x(t_1) = x_1$$

dan $x_0,\ x_1$ merupakan bilangan yang diberikan.

Asumsikan bahwa $x^* \in C^2$-fungsi yang menyelesaikan (1.3.22). Misal $\mu$ sebarang fungsi $\in C^2([t_0, t_1])$ yang memenuhi $\mu(t_0) = \mu t_{(1)} = 0$ untuk setiap rill $\epsilon$ fungsi

$$x = x^* + \epsilon\mu$$

adalah fungsi admisible (fungsi yang diperkenankan), dan $\in C^2$ memenuhi kondisi titik akhir $x(t_0) = x_0$ dan $x(t_1) = x_1$ maka mestilah

$$J(x^*) \geq J(x + \epsilon\mu)$$

untuk setiap bilangan rill $\epsilon$. Misal $\mu$ tetap, akan dipelajari $I(\epsilon) = J(x^* + \epsilon\mu)$ sebagai sebuah fungsi di $\epsilon$. Fungsi $I$ mempunyai maksimum untuk $\epsilon = 0$. akibatnya

$$I(0) = 0.$$

Sekarang

$$I(\epsilon) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x^* + \epsilon\mu, \dot{x}^* + \epsilon\mu)dt.$$

Dengan menggunakan proposisi sebelumnya, dan dengan mengganti $\mu$ diperoleh

$$0 = I'(0) = \int_{t_0}^{t_1} [\frac{\partial F^*}{\partial x}\mu + \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\dot{\mu}]dt$$

dimana

$$\frac{\partial F^*}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}(t, x^*, \dot{x}^*) \text{ dan } \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}^*} = \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}^*}(t, x^*, \dot{x}^*)$$

maka

$$\begin{aligned} 0 = I'(0) &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F^*}{\partial x}\mu dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}^*}\dot{\mu} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F^*}{\partial x}\mu dt + [\frac{\partial F^*}{\partial x}]_{t_0}^{t_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\mu dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [\frac{\partial F^*}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}]\mu dt, \qquad (\mu(t_1) = \mu(t_0) = 0) \end{aligned}$$

akibatnya

$$= \int_{t_0}^{t_1} [\frac{\partial F^*}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}]\mu dt = 0.$$

Untuk setiap $\mu \in C^2$ dengan $\mu(t_1) = \mu(t_0) = 0$. Dengan menggunakan lemma 2.3.3 maka

$$\frac{\partial F^*}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}} = 0$$

akibatnya $x^*$ memenuhi persamaan *Euler-Lagrange.*

**Kecukupan [?]:** Asumsikan bahwa $F(t, x, \dot{x})$ adalah konkaf pada dua variabel $(x, \dot{x})$, dan misalkan $x^*$ memenuhi persamaan *Euler-Lagrange* dengan kondisi titik akhir (1.3.22). Akan dibuktikan $x^*$ menyelesaikan masalah maksimum. Misal $x$ sebarang fungsi admisible pada masalah. Dengan konkafiti "Ketaksamaan Gradien" menghasilkan

$$\begin{aligned} F(t, x, \dot{x}) - F(t, x^*, \dot{x}^*) \leq & \frac{\partial F}{\partial x}(x - x^*) + \\ & \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}(\dot{x} - \dot{x}^*)(\frac{d}{dt}(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}(x - x^*) + (\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}(\dot{x} - \dot{x}^*) \\ = & \frac{d}{dt}((\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}(x - x^*)) \end{aligned}$$

untuk semua $t \in [t_0, t_1]$. Dengan menggunakan integrasi maka

$$\int_{t_0}^{t_1} (F(t, x, \dot{x} - F(t, x^*, \dot{x}^*))dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}((\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}(x - x^*))dt = \left[\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}(x - x^*)\right]_{t_0}^{t^1} = 0$$

dimana dengan menggunakan kondisi titik akhir untuk $x$ dan $x^*$ pada langkah terakhir. Akibatnya

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})dt \leq \int_{t_0}^{t_1} F(t, x^*, \dot{x}^*)dt.$$

## 1.4 Prinsip Maksimum Pontryagin

Prinsip Maksimum Pontryagin (PMP) merupakan salah satu metode untuk komputasi pada kontrol optimal. PMP memberikan syarat perlu fundamental untuk sebuah kontrol trayektori (keadaan) $(x, u)$ supaya optimal. Untuk solusi dari masalah kontrol optimal, metode PMP menentukan himpunan pada syarat perlu agar kontrol optimal dan persamaan *costate* haruslah dipenuhi. Syarat perlu diperoleh dari fungsi *Hamiltonian* $H$ yang didefinisikan sebagai [**?**]:

$$H(t, x, u, \lambda) \equiv f(t, x, u) + \lambda g(t, x, u) \tag{1.4.23}$$

Prinsip Maksimum Pontryagin menyatakan bahwa [**?**]:

Misal diberikan masalah kontrol optimal berikut

$$Maks\ J(u) = S(x(T), T) + \int_0^T F(x, u, t)dt$$

$$\text{kendala } \dot{x}(t) = f(x, u, t),\ x(0) = x_0.$$

Syarat perlu agar suatu $u^*$ menjadi kontrol optimal pada persamaan di atas adalah

$$H(t, x^*, u^*, \lambda) \geq H(t, x, u, \lambda) \quad untuk\ setiap\ t \in [0, T]$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (Kondisi\ optimal)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (Persamaan\ state) \tag{1.4.24}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (Persamaan\ adjoin)$$

$$\lambda(T)\ \ bebas \quad (Kondisi\ transversal).$$

**Bukti [?]:**

Berdasarkan masalah kontrol optimal dasar pada bentuk

$$J(u) = \int_{t_0}^{T} f(x(t), u(t), t)dt \tag{1.4.25}$$

$$s.t \quad \dot{x}_i(t) = g_i(x(t), u(t), t) \quad ; i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.4.26}$$

dimana akan dicari vektor kontrol optimal $u$ yang meminimumkan (1.4.25) pada (1.4.26). Terdapat tiga variabel yaitu variabel waktu ($t$), variabel keadaan yang dinotasikan oleh $\lambda(t)$. Seperti pengali *lagrange*, variabel adjoin merupakan hasil bayangan pada variabel keadaan. Variabel adjoin diperkenalkan ke masalah kontrol optimal oleh fungsi *hamiltonian* (1.4.23), dimana $H$ menotasikan *hamiltonian* dan sebuah fungsi empat variabel $t, x, u, \lambda$. Untuk persamaan konstrain (1.4.25) dibentuk fungsi tambahan $J^*$ sebagai

$$J^* = \int_0^T [f + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(g_i - \dot{x}_i)]dt \tag{1.4.27}$$

dimana integral

$$F = f + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(g_i - \dot{x}_i). \tag{1.4.28}$$

Fungsi *Hamiltonian* $H$ didefenisikan sebagai

$$H = f + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i \tag{1.4.29}$$

sehingga

$$J^* = \int_0^T [H - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dot{x}_i)]dt. \tag{1.4.30}$$

Integral baru $F = F(x,u,t)$ menjadi

$$F = H - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dot{x}_i. \tag{1.4.31}$$

Gunakan persamaan *Euler-Lagrange*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}) = 0 \ ; i = 1, 2, \cdots, n \tag{1.4.32}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_j} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{u_j}) = 0 \ ; j = 1, 2, \cdots, m. \tag{1.4.33}$$

Jika dihubungkan persamaan (1.4.28),(1.4.32),(1.4.33), maka diperoleh

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_i} + \lambda_i = 0 \ ; i = 1, 2, \cdots, n \tag{1.4.34}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial u_i} = 0 \ ; j = 1, 2, \cdots, m. \tag{1.4.35}$$

Jika dihubungkan persamaan (1.4.29),(1.4.34),(1.4.35), maka diperoleh

$$-\frac{\partial H}{\partial x_i} = \lambda_i \ ; i = 1, 2, \cdots, n \tag{1.4.36}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0 \ ; j = 1, 2, \cdots, m. \tag{1.4.37}$$

dimana (1.4.36) diketahui sebagai persamaan adjoin.

Solusi optimum untuk $x, u, \lambda$ bisa dimuat oleh persamaan (1.4.26),(1.4.36),(1.4.3

Sekarang dapat diketahui bermacam komponen keadaan pada prinsip maksimum untuk masalah (1.4.25) sebagai berikut :

1. $H(t, x^*, u^*, \lambda, \mu_0) \geq H(t, x, u, \lambda, \mu_0)$ untuk setiap $t \in [0, T]$

2. $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$ (Kondisi optimal)

3. $\dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda}$ (Persamaan *state*)

4. $\dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}$ (Persamaan adjoin)

5. $\lambda(T)$ bebas (Kondisi transversal)

Berdasarkan kondisi di atas, satu dan dua menyatakan bahwa untuk setiap waktu $t$ pada $u(t)$, kontrol optimal harus dipilih sehingga memaksimalkan nilai *hamiltonian* di semua nilai admisibel pada $u(t)$. Kondisi tiga dan empat pada prinsip maksimum, $\dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda}$ *dan* $\dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial y}$ memberikan dua persamaan pada sistem, selanjutnya disebut sebagai sistem *Hamiltonian* untuk permasalahan yang diberikan. Kondisi lima $\lambda(T)$*bebas* adalah kondisi transversal disediakan hanya untuk masalah terminal keadaan bebas [?].

## 1.5 Metode Runge-Kutta

### 1.5.1 Bentuk Umum Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta metode pengembangan dari deret Taylor yang tidak memerlukan perhitungan turunan yang lebih tinggi dan dilakukan langkah demi langkah. Metode Runge-Kutta mempunyai tiga sifat utama yaitu [?]:

1. Metodenya satu langkah, yang berarti bahwa untuk mencapai titik $y_{i+1}$ hanya diperlukan keterangan yang tersedia pada titik sebelumnya yaitu

titik $x_i, y_i$.

2. Mendekati ketelitian deret taylor sampai suku dalam $h^p$, dimana nilai p berbeda untuk metode yang berbeda, dan p ini disebut derajat dari metode.

3. Tidak memerlukan perhitungan turunan $f(x, y)$, tetapi hanya memerlukan fungsi itu sendiri.

Bentuk umum metode Runge-Kutta orde n adalah [?]:

$$y_{i+1} = y_i + a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n \tag{1.5.38}$$

dengan

$$k_1 = hf(x_iy_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1 + q_{22}k_2)$$

$$\vdots$$

$$k_n = hf(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1 + q_{n-1,2}k_2 + \cdots + q_{n-1,n-1}k_{n-1})$$

### 1.5.2 Metode Runge-Kutta Orde Empat

Berdasarkan ODE pada bentuk

$$\dot{X} = f(t, x). \tag{1.5.39}$$

Dalam bentuk umum, Runge-Kutta dapat dinyatakan sebagai

$$x_{i+1} = x_i + h\Phi(t_i, x_i, h) \tag{1.5.40}$$

dimana $\Phi(t_i, x_i, h) = a_1k_1, +a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4 + \cdots + a_nk_n$.

Sementara $a_i, i = 1, 2, 3, \cdots n$ adalah konstan dan $k_i, i = 1, 2, 3, \cdots n$ adalah fungsi relasi yang diberikan oleh

$$k_1 = f(t_i, x_i)$$

$$k_2 = f(t_i + \alpha_1 h, x_i + \beta_{11} k_1 h)$$

$$k_3 = f(t_i + \alpha_2 h, x_i + \beta_{21} k_1 h + \beta_{22} k_2 h)$$

$$\vdots$$

$$k_n = f(t_i + \alpha_{n-1} h, x_i + \beta_{n-1,1} k_1 h + \beta_{n-2,2} k_2 h + \cdots + \beta_{n-1,n-1} k_{n-1} h.$$

Misalkan $F_1 = f_t + f f_x, F_2 = f_{tt} + 2f f_{tx} + f^2 f f_x, F_3 = f_{ttt} + 3f f_{ttx} + 3f^2 f f_{txx} + f^3 f f_{xxx}$.

Dengan menurunkan persamaan (1.5.39) maka diperoleh

$$\ddot{x} = f_t + f_x x = f_t + f_x f = F_1$$

$$\dddot{x} = f_{tt} + 2f f_{tx} + f^2 f_{xx} + f_x(f_t + f f_x) = F_2 + f_x F_1$$

$x^{iv} = f_{ttt} + 3f f_{ttx} + 3f^2 f_{txx} + f^3 f_{xxx} + f_x(f_{tt} + 2f f_{tx} + f^2 f_{xx}) + 3(f_t + f f_x)(f_{tx} + f f_x) + f_x^2(f_t + f f_x) = F_3 + f_x F_2 + 3F_1(f_{tx} + f f_{xx}) + f_x^2 F_1$.

Lalu dengan menggunakan deret Taylor, kondisi di atas dapat ditulis sebagai berikut

$$x_{i+1} = x_i + hf + \frac{h^2}{2} F_1 + \frac{h^3}{6}(F_2 + f_x F_1) + \frac{h^4}{24}[F_3 + f_x F_2 + 3F_1(f_{tx} + f f_{xx}) + f_x^2 F_1] + \cdots . \quad (1.5.41)$$

Dan fungsi di n=4 diberikan oleh $k_1 = f(t_i, x_i)$

$$k_2 = f(t_i + \alpha_1 h, x_i + \beta_{11} k_1 h)$$

$$k_3 = f(t_i + \alpha_2 h, x_i + \beta_{21} k_1 h + \beta_{22} k_2 h)$$

$$k_4 = f(t_i + \alpha_3 h, x_i + \beta_{31} k_1 h + \beta_{32} k_2 h + \beta_{33} k_3 h).$$

Jika disubtitusikan ke (1.5.40) diperoleh

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} = & x_i + h[a_1 f(t_i, x_i) + \\
& a_2 f(t_i + \alpha_1 h, x_i + \beta_{11} k_1 h) + \\
& a_3 f(t_i + \alpha_2 h, x_i + \beta_{21} k_1 h + \beta_{22} k_2 h) + \\
& a_4 f(t_i + \alpha_3 h, x_i + \beta_{31} k_1 h + \beta_{32} k_2 h + \beta_{33} k_3 h)]. \qquad (1.5.42)
\end{aligned}
$$

Jika dibandingkan (1.5.41) dengan (1.5.42) dan Runge-Kutta untuk konstanta $\alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = 1$

$\beta_{11} = \frac{1}{2}, \beta_{21} = 0, \beta_{22} = \frac{1}{2}, \beta_{31} = 0, \beta_{11} = \frac{1}{2}, \beta_{32} = 0, \beta_{33} = 1$

$a_1 = \frac{1}{6}, a_2 = \frac{1}{6}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{6}.$

Oleh karena itu RK4 menjadi

$k_1 = f(t_i, x_i)$

$k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} k_1)$

$k_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} k_2)$

$k_4 = f(t_i + h, x_i + hk_3)$

$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), i = 0, 1, 2, 3, \cdots, N.$

Algoritma untuk metode Runge-Kutta orde empat untuk $\dot{X} = F(t, x, u)$ diberikan oleh [**?**] :

$$k_1 = f(t_i, x_i, u_i)$$

$$k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} k_1, u_i + \frac{h}{2}) \qquad (1.5.43)$$

$$k_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} k_2, u_i + \frac{h}{2}))$$

$$k_4 = f(t_i + h, x_i + h, u_i + h)$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), i = 0, 1, 2, 3, \cdots, N$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), i = 0, 1, 2, 3, \cdots, N.$$

Algoritma untuk metode Runge-Kutta orde empat untuk $\dot{\lambda} = F(t, \lambda, x, u)$ diberikan oleh [**?**] :

$$k_1 = f(t_i, \lambda_i, x_i, u_i)$$

$$k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, \lambda_i + \frac{h}{2}k_1, x_i + \frac{h}{2}k_1, u_i + \frac{h}{2})$$

$$k_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, \lambda_i + \frac{h}{2}k_2, x_i + \frac{h}{2}k_2, u_i + \frac{h}{2})$$

$$k_4 = f(t_i + h, \lambda_i + hk_3, x_i + h, u_i + h) \qquad (1.5.44)$$

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), i = 0, 1, 2, 3, \cdots, N.$$