

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Misalkan S merupakan penjumlahan peubah-peubah acak yang dinyatakan dengan

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

dimana $N, (X_i = X_1, X_2, \dots, X_N)$ masing-masing peubah acak dan X_i adalah peubah acak yang saling bebas dan identik (iid) serta menyebar eksponensial dengan konstanta penstabil dengan parameter λ dan saling bebas terhadap peubah acak N menyebar binomial negatif (p, r) , maka peubah acak S disebut sebaran binomial negatif majemuk sebagai penjumlahan sebaran eksponensial dengan konstanta penstabil. Sifat-sifat dari peubah acak S yaitu

- Nilai harapan dari peubah acak S adalah

$$E_S(S) = \frac{r(1-p)(1-e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda})}{p\lambda(1-e^{-\lambda})}$$

- Varian dari peubah acak S adalah

$$Var_S(S) = \frac{v_1 - v_2}{p^2\lambda^2(1-e^{-\lambda})^2}$$

dimana

$$v_1 = rp(1-p)((1-e^{-\lambda})^2 - \lambda^2 e^{-\lambda}) + r(1-p)(1-e^{-\lambda})^2 \quad (5.1.1)$$

$$v_2 = r(1-p)(2e^{-\lambda}\lambda(1-e^{-\lambda}) - \lambda^2 e^{-2\lambda})$$

- Fungsi pembangkit momen dari peubah acak S adalah

$$M_S(t) = \left(\frac{p(\lambda-t)(1-e^{-\lambda})}{(\lambda-t)(1-e^{-\lambda}) + \lambda(1-p)(e^{-(\lambda-t)} - 1)} \right)^r$$

- Fungsi karakteristik dari peubah acak S adalah

$$\varphi_S(t) = \left(\frac{p(\lambda-it)(1-e^{-\lambda})}{(\lambda-it)(1-e^{-\lambda}) + \lambda(1-p)(e^{-(\lambda-it)} - 1)} \right)^r$$

- Skewness dari peubah acak S adalah

$$\begin{aligned} \text{Skew}(S) &= \frac{E_S((S-\mu)^3)}{\sigma^3} \\ &= \frac{r(r-1)(r-2)s_1^3 + 3r(r-1)s_1(s_2 + 2s_3^2) + r(s_4 - s_5 + s_3s_6 - 6s_3^3)}{(v_1 - v_2)^{3/2}} \\ &\quad - \frac{3r^2(r-1)(p\lambda(1-e^{-\lambda})s_1s_7) + 3r^2s_7(s_2 + 2s_3^2) - 2r^3s_7^3}{(v_1 - v_2)^{3/2}} \end{aligned}$$

dimana v_1, v_2 seperti didefinisikan pada persamaan (5.1.1) dan

$$\begin{aligned} s_1 &= -p(1-e^{-\lambda}) - (-1 + e^{-\lambda} + \lambda(1-p)e^{-\lambda}) \\ s_2 &= p(1-e^{-\lambda})(2(-1 + e^{-\lambda} + \lambda(1-p)e^{-\lambda}) - \lambda^2(1-p)e^{-\lambda}) \\ s_3 &= -1 + e^{-\lambda} + \lambda(1-p)e^{-\lambda} \\ s_4 &= p^2\lambda^2(1-e^{-\lambda})^2(1-p)e^{-\lambda}(3-\lambda) \\ s_5 &= 6p(1-e^{-\lambda})(-1 + e^{-\lambda} + \lambda(1-p)e^{-\lambda})^2 \\ s_6 &= 6p\lambda^2(1-p)e^{-\lambda}(1-e^{-\lambda}) \\ s_7 &= (1-p)(1-e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}) \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

- Kurtosis dari peubah acak S adalah

$$\begin{aligned}
Kurt(S) &= \frac{E_S((S - \mu)^4)}{\sigma^4} \\
&= \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)s_1^4 + 6r(r-1)(r-2)s_1^2(s_2 + 2s_3^2)}{(v_1 - v_2)^2} \\
&\quad + \frac{3r(r-1)(s_2 + 2s_3^2)^2 + 4r(r-1)s_1(s_4 - s_5 + s_3s_6 - 6s_3^3)}{(v_1 - v_2)^2} \\
&\quad + \frac{r(s_8 - s_9 + s_{10} + 24p(1 - e^{-\lambda})s_3^3 - s_3^2s_6 + 24s_3^4)}{(v_1 - v_2)^2} \\
&\quad - \frac{r^2(r-1)(r-2)s_1^3s_7 + 12r^2(r-1)s_1s_7(s_2 + 2s_3^2)}{(v_1 - v_2)^2} \\
&\quad - \frac{4r^2s_7(s_4 - s_5 + s_3s_6 - 6s_3^3) - 6r^3(r-1)s_7^2p\lambda(1 - e^{-\lambda})s_1}{(v_1 - v_2)^2} \\
&\quad + \frac{6r^3s_7^2(s_2 + 2s_3^2) - 2r^4s_7^4}{(v_1 - v_2)^2}
\end{aligned}$$

dimana v_1, v_2 seperti didefinisikan pada persamaan (5.1.1), $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7$ seperti pada persamaan (5.1.2) dan

$$\begin{aligned}
s_8 &= (p\lambda(1 - e^{-\lambda}))^3(1 - p)e^{-\lambda}(4 - \lambda) \\
s_9 &= 16(p\lambda(1 - e^{-\lambda}))^2(1 - p)e^{-\lambda}(-1 + e^{-\lambda} + \lambda(1 - p)e^{-\lambda}) \\
s_{10} &= 6p^2\lambda^4(1 - e^{-\lambda})^3(1 - p)^2e^{-2\lambda}
\end{aligned}$$

Fungsi karakteristik sebaran binomial negatif majemuk sebagai penjumlahan sebaran eksponensial dengan konstanta penstabil merupakan fungsi karakteristik terbagi tak hingga, Karena untuk sebarang bilangan bulat positif m , terdapat

$$\varphi_{S_m}(t) = \left(\frac{p(\lambda - it)(1 - e^{-\lambda})}{(\lambda - it)(1 - e^{-\lambda}) + \lambda(1 - p)(e^{-(\lambda - it)} - 1)} \right)^{\frac{r}{m}}$$

yaitu fungsi karakteristik sebaran binomial negatif majemuk sebagai penjumlahan sebaran eksponensial dengan konstanta penstabil $(r/m, p, \lambda)$ sedemikian sehingga berlaku $\varphi_S(t) = (\varphi_{S_m}(t))^m$

5.2 Saran

Pada penelitian ini dibahas tentang sifat-sifat dari sebaran binomial negatif majemuk sebagai penjumlahan sebaran eksponensial dengan konstanta penstabil antara lain nilai harapan, variansi, fungsi pembangkit momen, fungsi karakteristik, skewness, kurtosis dan telah ditentukan keterbagian tak hingga dengan menggunakan fungsi karakteristik. Untuk kajian lebih lanjut, pembaca dapat membahas lebih dalam tentang karakterisasi lainnya dan aplikasinya.

