

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

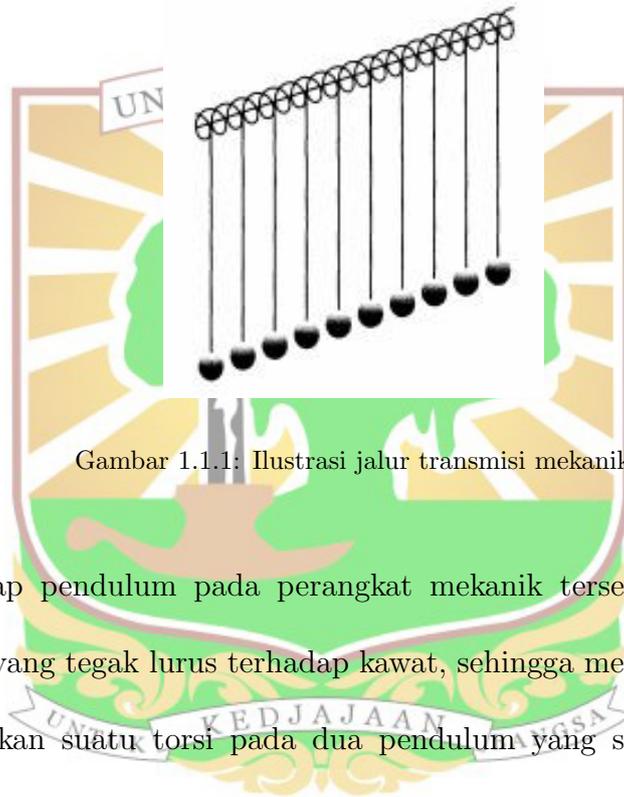
Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat satu atau beberapa turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Persamaan diferensial memiliki peran yang besar serta banyak diterapkan pada berbagai bidang seperti fisika, teknik, biologi, kimia, ekonomi dan sebagainya.

Berdasarkan banyaknya variabel bebas, persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi dua macam, yaitu persamaan diferensial biasa dan parsial. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat satu variabel bebas, sedangkan persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat dua variabel bebas atau lebih. Pada tesis ini akan dikaji salah satu persamaan diferensial parsial yang berbentuk

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0. \quad (1.1.1)$$

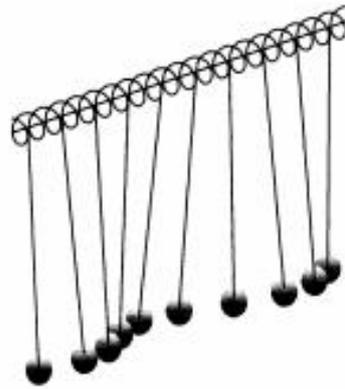
Persamaan (1.1.1) disebut persamaan sine-Gordon. Persamaan sine-Gordon muncul pertama kali dalam geometri diferensial. Persamaan ini menjadi perhatian banyak peneliti karena ia muncul dalam berbagai fenomena fisika, seperti perambatan fluks magnetik dan kestabilan gerak fluida. Persamaan sine-Gordon dianggap sebagai persamaan evolusi nonlinier yang berperan utama dalam fisika nonlinier [1].

Pada akhir tahun 1960, A. C. Scott menunjukkan bahwa persamaan sine-Gordon juga dapat mendeskripsikan dinamika jalur transmisi mekanik [2]. Perangkat mekanik tersebut terdiri dari rangkaian pendulum yang terhubung oleh suatu pegas baja yang kedudukannya ditopang secara horizontal oleh kawat tipis (lihat Gambar 1.1.1). Dalam hal ini,  $u(x, t)$  pada persamaan (1.1.1) menyatakan sudut simpangan pendulum di posisi  $x$  dan waktu  $t$ .



Gambar 1.1.1: Ilustrasi jalur transmisi mekanik

Setiap pendulum pada perangkat mekanik tersebut bebas berayun pada bidang yang tegak lurus terhadap kawat, sehingga membuat pegas terlilit dan memberikan suatu torsi pada dua pendulum yang saling bersebelahan. Interaksi antara dua pendulum tersebut menghasilkan suatu gangguan pada bagian perangkat yang kemudian merambat ke bagian lain, yaitu terjadi transmisi sinyal secara mekanik di sepanjang rangkaian pendulum (perhatikan Gambar 1.1.2).



Gambar 1.1.2: Gangguan kecil yang ditransmisi sepanjang rangkaian pendulum

Persamaan sine-Gordon diketahui memiliki solusi gelombang berjalan (*travelling wave*) yang berbentuk [2]

$$u(x, t) = 4 \arctan \left[ \exp \left( \pm \frac{x - ct}{\sqrt{1 - c^2}} \right) \right], \quad (1.1.2)$$

yang merambat dengan kecepatan tetap  $c$  dan memiliki sifat dapat mempertahankan bentuknya saat merambat. Gelombang berjalan yang memiliki sifat seperti ini dikenal dengan istilah gelombang soliter (*solitary wave*) [1]. Lebih lanjut, dapat dengan mudah mengamati bahwa  $u(x, t) \rightarrow 0$  ketika  $x \rightarrow \infty$ , dan  $u(x, t) \rightarrow 2\pi$  ketika  $x \rightarrow -\infty$ . Solusi dimana nilai  $u(x, t)$  meningkat sebesar  $2\pi$  dinamakan *kink*, sedangkan yang menurun sebesar  $2\pi$  disebut *antikink* [1].

Beberapa metode klasik telah digunakan untuk menyelesaikan persamaan sine-Gordon. Transformasi Bäcklund, metode similaritas, dan metode *scattering* invers adalah metode-metode yang banyak digunakan untuk menganalisis persamaan ini [1]. Pada tahun 2010, Eleuch dan Rostovtsev menggunakan transformasi arctan dalam menyelesaikan persamaan sine-Gordon [6], yaitu dengan mensubstitusikan  $u(x, t) = 4 \arctan \left[ \frac{F(x)}{G(t)} \right]$  ke persamaan (1.1.2), kemudian menentukan ekspresi umum untuk  $F(x)$  dan  $G(t)$ . Dengan menggu-

nakan transformasi ini, mereka memperoleh solusi dalam bentuk umum tanpa ada pembatasan pada nilai-nilai parameter. Hasil penyelesaian seperti ini tidak ditemukan pada metode sebelumnya.

## 1.2 Rumusan Masalah

Tesis ini akan membahas penyelesaian analitik dari persamaan sine-Gordon dengan menggunakan transformasi arctan. Pembahasan pada tesis ini mengeksplorasi kembali kajian yang dikemukakan oleh Eleuch dan Rostovtsev [6].

## 1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan bentuk lain dari penyelesaian sine-Gordon dengan menggunakan transformasi arctan.

## 1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah untuk memperkaya kajian analitik mengenai metode penyelesaian persamaan diferensial parsial nonlinier.

## 1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan tesis ini terdiri atas:

- Bab I: Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, man-

faat penelitian, dan sistematika penulisan.

- Bab II: Tinjauan pustaka

Bab ini berisi persamaan diferensial parsial, penurunan persamaan sine-Gordon, solusi gelombang berjalan, dan fungsi eliptik weierstrass.

- Bab III: Penyelesaian dengan transformasi arctan

Bab ini berisi analisis awal, kasus konstanta  $k = 0$  dan kasus konstanta  $k \neq 0$ .

- Bab IV: Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dan saran untuk penelitian ini.

