BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial merupakan persamaan matematika yang melibatkan turunan suatu fungsi. Persamaan ini seringkali digunakan untuk memodelkan banyak fenomena alam. Untuk masalah-masalah yang lebih realistis, persamaan diferensial terkadang sulit untuk mendapatkan penyelesaian eksaknya. Akibatnya pendekatan numerik diperlukan untuk menyelesaikan persamaan diferensial tersebut. Hal ini dilakukan dengan mencari hampiran turunan fungsi pada persamaan tersebut terlebih dahulu.

Salah satu metode numerik yang paling sering digunakan untuk menghitung hampiran turunan fungsi adalah metode beda hingga (*finite difference*). Pada metode ini domain fungsi dipartisi atas sejumlah titik dan rumus aproksimasi untuk turunan diperoleh dari ekspansi deret Taylor di satu atau lebih titik partisi [6]. Berdasarkan lokasi titik-titik yang digunakan, metode beda hingga dibagi atas tiga jenis, yaitu beda maju (*forward difference*), beda mundur (*backward difference*), dan beda pusat (*central difference*).

Rumus umum beda hingga untuk turunan ke-m dengan ketelitian orde ke-n dapat ditentukan dengan suatu algoritma rekursif. Hal ini berarti untuk menentukan rumus turunan ke-m dengan ketelitian orde ke-n, perlu diketahui terlebih dahulu rumus turunan ke-$(m-1)$ dengan ketelitian orde ke-$(n-1)$. Salah satu algoritma rekursif tersebut adalah algoritma yang dikembangkan oleh Fornberg [3]. Dari algoritma rekursif Fornberg tersebut dapat dibuat tabel yang berisi koefisien-koefisien rumus beda maju, mundur dan pusat untuk beberapa tingkatan turunan fungsi dan orde ketelitian.

Dalam penerapannya, pada algoritma rekursif Fornberg dibutuhkan beban memori komputasi yang semakin besar untuk menghitung hampiran turunan fungsi dengan tingkatan turunan dan orde ketelitian yang semakin tinggi. Hal ini disebabkan karena semakin tinggi tingkatan turunan dan orde ketelitian, maka semakin banyak data (*titik-titik partisi*) yang diperlukan. Untuk mengatasi hal ini, maka diperlukan bentuk tutup dari rumus beda hingga agar koefisien-koefisiennya dapat ditentukan secara langsung tanpa melewati proses perhitungan secara rekursif.

Bentuk tutup sendiri adalah suatu ekspresi matematika yang tidak melibatkan perhitungan secara rekursif [9]. Sebagai contoh, penjumlahan

$$f_m = \sum_{i=1}^{m} i^3 \tag{1.1.1}$$

dapat dihitung secara rekursif, artinya untuk menghitung f_m perlu diketahui dulu nilai f_{m-1} dan seterusnya. Namun, dengan menggunakan bentuk tutup, persamaan (1.1.1) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$f_m = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 \tag{1.1.2}$$

yang menjadi lebih sederhana perhitungannya, karena dapat dihitung langsung untuk setiap m (tanpa harus dicari dulu nilai f_{m-1}).

Dalam referensi [5], Khan dkk memberikan bentuk tutup dari rumus beda hingga yang dikembangkan berdasarkan deret Taylor. Untuk hampiran turunan pertama dan turunan kedua suatu fungsi $f(x)$ di titik $x = x_0$, bentuk tutup dari rumus beda hingganya berturut-turut diberikan oleh

$$f^{'}(x_0) \approx \frac{1}{T} \sum_{k} g_k f_k, \tag{1.1.3}$$

$$f^{''}(x_0) \approx \frac{1}{T^2} \sum_{k} g_k f_k, \tag{1.1.4}$$

dimana T menyatakan lebar selang partisi, sedangkan koefisien g_k dan iterator k didefinisikan berdasarkan orde dan jenis beda hingga.

Aproksimasi (1.1.3) dan (1.1.4) telah divalidasi secara numerik dalam referensi [4]. Pembuktian untuk aproksimasi (1.1.3) kasus beda maju telah dijelaskan secara rinci oleh Khan dkk dalam referensi [5], yang kemudian diikuti oleh pembuktian untuk kasus beda mundur dan beda pusat yang masing-masing diberikan dalam referensi [6] dan [7]. Pada tugas akhir ini akan dibahas pembuktian bentuk tutup rumus beda hingga untuk turunan kedua, yaitu persamaan (1.1.4), dengan mengambil kasus beda pusat.

1.2 Perumusan Masalah

Rumusan masalah dalam skripsi ini adalah bagaimana pembuktian bentuk tutup rumus beda pusat untuk turunan kedua yang dikembangkan oleh Khan dan Ohba dalam referensi [4].

1.3 Pembatasan Masalah

Pembahasan dalam skripsi ini dibatasi pada pembuktian bentuk tutup rumus beda pusat untuk turunan kedua dari fungsi satu variabel.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk memberikan penjelasan detail mengenai pembuktian matematis dari bentuk tutup rumus beda pusat untuk turunan kedua berdasarkan deret Taylor.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan pada skripsi ini terdiri atas empat bab. Bab I memuat latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan. Bab II membahas beberapa konsep dan dasar-dasar teori yang berkaitan dengan permasalahan yang akan dikaji. Pada Bab III dijelaskan pembuktian bentuk tutup dari rumus beda pusat untuk turunan kedua berdasarkan deret Taylor. Selanjutnya pada Bab IV disajikan kesimpulan dan saran.