

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah bagian dari matematika diskrit yang banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan atau menyatakan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti dan diselesaikan. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 ketika Euler mencoba menyelesaikan masalah berikut. Apakah terdapat kemungkinan seseorang dapat melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di Konisberg, sedemikian sehingga setiap jembatan dilalui tepat satu kali [1]. Masalah jembatan Konisberg tersebut dapat dinyatakan dalam graf dengan merepresentasikan keempat daerah tersebut sebagai titik dan ketujuh jembatan sebagai sisi yang menghubungkan pasangan titik yang sesuai.

Pada teori graf terdapat istilah dimensi metrik yang diperkenalkan oleh Harary dan Melter [5]. Misalkan terdapat graf terhubung G . Misalkan u dan v adalah titik-titik dalam G . Jarak antara u dan v , dinotasikan $d(u, v)$, adalah panjang lintasan terpendek antara kedua titik tersebut di G . Misalkan terdapat himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\} \subset V(G)$. Representasi

titik v terhadap W , dinotasikan $r(u|W)$, didefinisikan sebagai k -vektor

$$r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)).$$

Jika untuk setiap dua titik u dan v di G berlaku bahwa $r(u|W) = r(v|W)$, maka W dinamakan himpunan pemisah untuk G . Himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum dinamakan himpunan pemisah minimum, dan kardinalitas dari himpunan pemisah minimum dinamakan dimensi metrik dari G , dinotasikan $\dim(G)$ [3].

Chartrand dkk. [3] menentukan sifat-sifat graf terhubung G dengan $\dim(G) = 1$, $\dim(G) = n - 1$, atau $\dim(G) = n - 2$. Dalam makalah yang sama, mereka memperoleh dimensi metrik dari graf siklus C_n , graf pohon sebarang T , serta batas untuk dimensi metrik dari graf unicyclic, yaitu graf yang memuat tepat satu siklus. Beberapa hasil lainnya antara lain adalah penentuan dimensi metrik dari graf kipas oleh Caceres dkk. [2], graf roda oleh Shanmukha dkk. [9] dan graf unicyclic oleh Poisson dan Zhang [8].

Pada makalah [6] telah dibahas tentang dimensi metrik dari graf $G \overline{K}_m$, dimana G adalah graf terhubung sebarang dengan $|V(G)| = n$, dan \overline{K}_m adalah komplemen dari graf lengkap dengan $m \geq 2$. Dalam makalah tersebut diberikan masalah terbuka terkait penentuan dimensi metrik untuk $G \overline{K}_m$ untuk $m \geq 1$. Graf $G \overline{K}_m$ adalah graf yang merupakan hasil operasi korona antara suatu graf terhubung G sebarang berorde n dan komplemen graf lengkap berorde m . Graf $G \overline{K}_m$ tersebut dapat dilihat sebagai graf G dengan penambahan sebanyak m daun ke setiap titik v_i yang ada di G ,

untuk $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Selanjutnya, pada makalah yang sama, dikonstruksi suatu graf baru, namakan graf H , yaitu graf yang diperoleh dengan penambahan sebanyak $l_i, l_i \geq 2$ daun ke titik v_i di graf terhubung G , untuk $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, serta diperoleh dimensi metrik dari graf H tersebut. Graf H yang didefinisikan pada [6] dapat dilihat sebagai graf thorn dari sebarang graf terhubung G dengan n titik, sesuai definisi graf thorn yang diberikan oleh Liu [7].

Pada penelitian ini akan diberikan solusi dari masalah terbuka dalam [6]. Selanjutnya akan ditentukan dimensi metrik dari graf thorn dari graf lengkap K_n , dinotasikan $Th(K_n, l_1, l_2, \dots, l_n)$ untuk $n \geq 1$ dan $l_i \geq 1, i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

1.2 Perumusan Masalah

Perumusan masalah pada tugas akhir ini adalah bagaimana menentukan dimensi metrik dari $G = \overline{K}_m$, dengan $|V(G)| = n$ dan $m \geq 1$ serta bagaimana menentukan dimensi metrik dari graf thorn dari graf Lengkap K_n , dinotasikan $Th(K_n, l_1, l_2, \dots, l_n)$ untuk $n \geq 1$ dan $l_i \geq 1, i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai pada penulisan tugas akhir ini adalah menjawab masalah terbuka pada paper [6], yaitu penentuan dimensi metrik dari $G = \overline{K}_m$, dengan $|V(G)| = n$ dan $m \geq 1$, serta penentuan dimensi metrik

dari graf $Th(K_n, l_1, l_2, \dots, l_n)$ untuk $n \geq 1$ dan $l_i \geq 1, i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

1.4 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada tugas akhir ini adalah sebagai berikut. Pada Bab I Pendahuluan diberikan gambaran singkat tentang latar belakang, rumusan masalah serta tujuan penelitian. Pada Bab II Landasan Teori dibahas tentang beberapa teori dasar yang digunakan dalam pembahasan. Pada Bab III diberikan pembahasan tentang penentuan dimensi metrik dari G K_m , dengan $|V(G)| = n$ dan $m \geq 1$, serta penentuan dimensi metrik dari graf $Th(K_n, l_1, l_2, \dots, l_n)$ untuk $n \geq 1$ dan $l_i \geq 1, i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pada Bab IV diberikan kesimpulan serta dugaan yang diperoleh dalam tugas akhir ini.

