BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Banyak sekali fenomena di alam ini yang dapat dimodelkan oleh persamaan diferensial, yaitu persamaan matematika yang melibatkan turunan suatu fungsi. Untuk masalah-masalah yang lebih realistis, persamaan diferensial yang dihasilkan terkadang sulit untuk dicari penyelesaian eksaknya, sehingga pendekatan numerik diperlukan untuk menyelesaikan persamaan diferensial tersebut, yaitu dengan mencari hampiran turunan fungsinya terlebih dahulu.

Salah satu metode numerik yang paling sering dan mudah digunakan dalam menghitung hampiran turunan suatu fungsi adalah metode beda hingga. Pada metode ini domain suatu fungsi dipartisi atas sejumlah titik dan rumus aproksimasi untuk turunan diperoleh dari ekspansi deret Taylor di satu atau lebih titik partisi [6]. Berdasarkan lokasi titik-titik partisi yang digunakan, metode beda hingga dibagi atas tiga jenis, yaitu beda maju (*forward difference*), beda mundur (*backward difference*), dan beda pusat (*central difference*).

Rumus umum beda hingga untuk turunan ke-m dengan ketelitian orde ke-n dapat dibangkitkan dengan suatu algoritma rekursif; Artinya untuk memperoleh rumus turunan ke-m dengan ketelitian orde ke-n, perlu diketahui terlebih dahulu rumus turunan ke-$(m-1)$ dengan ketelitian orde ke-$(n-1)$. Salah satu algoritma rekursif tersebut dikembangkan oleh Fornberg [3], yang darinya dapat dibuat tabel yang berisi koefisien-koefisien rumus beda maju, mundur dan pusat untuk beberapa tingkatan turunan fungsi dan orde ketelitian.

Dalam tataran praktis, algoritma rekursif membutuhkan memori komputasi yang semakin besar ketika tingkatan turunan fungsi yang ingin dihampiri dan orde ketelitiannya semakin tinggi. Hal ini karena banyaknya data (*titik-titik partisi*) yang terlibat semakin banyak. Untuk mengatasi hal tersebut, diperlukan bentuk tutup dari rumus beda hingga agar koefisien-koefisiennya dapat ditentukan secara langsung tanpa melewati proses perhitungan secara rekursif.

Adapun yang dimaksud dengan bentuk tutup di sini adalah suatu ekspresi matematika yang tidak melibatkan perhitungan secara rekursif [8]. Sebagai contoh, penjumlahan

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} i \tag{I.1}$$

dapat dihitung secara rekursif, artinya untuk menghitung f_n perlu diketahui dulu f_{n-1} dan seterusnya. Namun, dengan menggunakan bentuk tutup, persamaan (I.1) diatas dapat dinyatakan dalam bentuk

$$f_n = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{I.2}$$

yang menjadi lebih sederhana perhitungannya, karena langsung dapat dihitung untuk setiap n (tanpa harus tahu dulu nilai f_{n-1}).

Dalam referensi [4], Khan dkk memberikan bentuk tutup dari rumus beda hingga yang dikembangkan berdasarkan deret Taylor. Untuk hampiran turunan pertama suatu fungsi $f(x)$ di titik $x = x_0$, bentuk tutup dari rumus beda hingga diberikan oleh

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{T}\sum_{k} g_k f_k, \tag{I.3}$$

dimana T menyatakan lebar selang partisi, sedangkan koefisien g_k dan iterator k didefinisikan berdasarkan orde dan jenis beda hingga.

Rumus (I.3) telah divalidasi secara numerik sampai ke orde N yang cukup besar dalam referensi [4], dan telah dibuktikan secara matematis dalam referensi [5] untuk kasus beda maju. Namun bukti untuk kasus beda mundur dan beda pusat belum diberikan.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam skripsi ini adalah bagaimana pembuktian rumus bentuk tutup beda mundur berdasarkan deret Taylor yang dikembangkan oleh Khan dan Ohba dalam referensi [4]. Langkah-langkah pembuktian bentuk tutup beda mundur tersebut diambil dari ide pembuktian bentuk tutup beda maju yang telah dijelaskan dalam referensi [5].

1.3 Pembatasan Masalah

Pembahasan dalam skripsi ini dibatasi pada pembuktian rumus bentuk tutup beda mundur untuk turunan pertama dari fungsi satu variabel.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk memberikan penjelasan detail mengenai pembuktian rumus bentuk tutup beda mundur berdasarkan deret Taylor.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan pada skripsi ini terdiri atas empat bab. Bab I memuat latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan. Bab II membahas beberapa konsep dan dasar-dasar teori yang berkaitan dengan permasalahan yang akan dikaji. Pada Bab III dijelaskan pembuktian rumus bentuk tutup beda mundur berdasarkan deret Taylor. Selanjutnya pada Bab IV dijelaskan kesimpulan dan saran.