BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan matematika yang melibatkan turunan atau dikenal sebagai persamaan diferensial seringkali digunakan untuk memodelkan banyak fenomena alam. Untuk masalah-masalah yang lebih realistis, model persamaan diferensial yang dihasilkan terkadang sulit dicari penyelesaian eksaknya. Dalam hal ini, diperlukan pendekatan numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial tersebut.

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial secara numerik, perlu dicari terlebih dahulu hampiran suku turunan yang muncul dalam persamaan diferensial tersebut. Salah satu metode numerik yang biasa digunakan untuk menghitung hampiran turunan suatu fungsi adalah metode beda hingga (*finite difference*). Pada metode ini variabel domain suatu fungsi dipartisi atas sejumlah titik dan rumus aproksimasi untuk turunan diperoleh dari ekspansi deret Taylor di satu atau lebih titik partisi [6]. Berdasarkan lokasi titik-titik partisi yang digunakan, metode beda hingga dibagi atas tiga jenis, yaitu beda maju (*forward difference*), beda mundur (*backward difference*) dan beda pusat (*central difference*).

Rumus umum beda hingga untuk turunan ke-m dengan ketelitian orde ke-n dapat dibangkitkan dengan suatu algoritma rekursif. Artinya, untuk memperoleh rumus turunan ke-m dengan ketelitian orde ke-n, perlu diketahui terlebih dahulu rumus turunan ke-$(m-1)$ dengan ketelitian orde ke-$(n-1)$. Salah satu algoritma rekursif tersebut dikembangkan oleh Fornberg [3] yang darinya dapat dibuat tabel yang berisi koefisien-koefisien rumus beda maju, beda mundur dan beda pusat untuk beberapa tingkatan turunan fungsi dengan beberapa orde ketelitian.

Dalam implementasinya, algoritma rekursif Fornberg membutuhkan beban memori komputasi yang semakin besar untuk menghitung hampiran turunan fungsi dengan tingkatan turunan dan orde ketelitian yang semakin tinggi. Hal ini disebabkan karena semakin tinggi tingkatan turunan dan orde ketelitian, maka jumlah data (titik-titik partisi) yang diperlukan semakin banyak. Untuk mengatasi hal tersebut, diperlukan bentuk tutup dari rumus beda hingga agar koefisien-koefisiennya dapat ditentukan secara langsung tanpa melewati proses perhitungan secara rekursif.

Adapun yang dimaksud dengan bentuk tutup di sini adalah suatu ekspresi matematika yang tidak melibatkan perhitungan secara rekursif. Sebagai contoh, ekspresi matematika

$$f(x) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \tag{1.1}$$

bukanlah dalam bentuk tutup karena penjumlahannya memerlukan perhitungan secara rekursif. Ekspresi di atas dapat dinyatakan dalam bentuk tutup

$$f(x) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{1.2}$$

yang menjadi lebih sederhana perhitungannya.

Bentuk tutup dari rumus beda hingga telah diformulasikan oleh Khan dan Ohba pada tahun 1999 [4]. Untuk hampiran turunan pertama suatu fungsi $f(x)$ di titik $x = x_0$, bentuk tutup dari rumus beda hingga diberikan oleh

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{T} \sum_k g_k f_k, \tag{1.3}$$

dimana T menyatakan lebar selang partisi, sedangkan koefisien g_k dan iterator k didefinisikan berdasarkan orde dan jenis beda hingga.

Rumus untuk koefisien g_k diperoleh oleh Khan dan Ohba dengan mengobservasi solusi sistem persamaan yang dibangun dari deret Taylor. Validasi rumus tersebut telah dibuktikan secara numerik sampai orde ke N yang cukup besar, dan telah dibuktikan secara matematis untuk kasus beda maju [5]. Namun bukti untuk kasus beda mundur dan beda pusat belum diberikan secara detail.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka perumusan masalah pada skripsi ini adalah bagaimana pembuktian dari bentuk tutup rumus beda pusat berdasarkan deret Taylor yang dikembangkan oleh Khan dan Ohba pada referensi [4]. Langkah-langkah pembuktian bentuk tutup beda pusat tersebut mengambil ide pembuktian bentuk tutup beda maju yang telah dijelaskan dalam referensi [5].

1.3 Pembatasan Masalah

Permasalahan pada skripsi ini dibatasi pada pembuktian bentuk tutup rumus beda pusat untuk turunan pertama dari fungsi satu variabel.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan pada penulisan ini adalah untuk memberikan penjelasan detail tentang pembuktian dari bentuk tutup rumus beda pusat berdasarkan deret Taylor.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan pada skripsi ini terdiri atas empat bab. Bab I memuat latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan. Bab II membahas beberapa konsep dan dasar-dasar teori yang berkaitan dengan permasalahan yang akan dikaji. Selanjutnya pada Bab III dijelaskan pembuktian bentuk tutup dari rumus beda pusat berdasarkan deret Taylor. Terakhir Bab IV berisikan kesimpulan yang diambil berdasarkan hasil analisis yang telah dibahas dalam bab-bab sebelumnya dan saran untuk penelitian berikutnya.