BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Diberikan sistem linier berikut:

$$F\mathbf{y}(t+1) = S\mathbf{y}(t) + T\mathbf{w}(t),\ t \in \mathbb{Z}_+, \tag{I.1}$$

dimana $F, S \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $T \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^m$, dalam hal ini $\mathbb{R}^{n\times m}$ menyatakan himpunan matriks-matriks riil berukuran $n \times m$ dan $\mathbb{R}^m$ menyatakan himpunan vektor-vektor riil yang terdiri atas m komponen. Selanjutnya notasi $\mathbb{R}_+^{n\times m}$ menyatakan himpunan matriks-matriks riil berukuran $n \times m$ dimana setiap unsurnya adalah nonnegatif, $\mathbb{R}_+^m$ menyatakan himpunan vektor-vektor riil yang terdiri atas m komponen dengan setiap komponennya adalah nonnegatif dan $\mathbb{Z}_+$ menyatakan himpunan bilangan bulat positif. Sistem (I.1) sering juga disebut sebagai sistem singular diskrit [3]. Jika

rank$(F) = n$, maka sistem (I.1) dikatakan sistem linier normal, sehingga dapat ditulis menjadi:

$$\mathbf{y}(t+1) = F^{-1}S\mathbf{y}(t) + F^{-1}T\mathbf{w}(t), \tag{I.2}$$

dan solusi dari sistem (I.2) selalu ada dan tunggal.

Sistem (I.1) dengan rank$(F) < n$ dikatakan mempunyai solusi jika $\det(\lambda F - S) \neq 0$ untuk suatu $\lambda \in \mathbb{C}$, dimana $\mathbb{C}$ menyatakan himpunan bilangan kompleks. Dalam hal $\det(\lambda F - S) \neq 0$ untuk suatu $\lambda \in \mathbb{C}$, sistem (I.1) disebut sebagai sistem singular reguler.

Sistem (I.1) dikatakan positif jika untuk setiap keadaan awal $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n_+$ dan untuk setiap vektor $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^m_+$ maka $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n_+$. Solusi dari sistem (I.1) ada jika syarat regularitas terpenuhi. Dalam beberapa situasi kadang-kadang diperlukan upaya untuk menormalkan sistem (I.1). Dalam [6] dinyatakan bahwa sistem (I.1) dapat dinormalkan jika terdapat suatu vektor $\mathbf{w}(t) = -\mathcal{K}\mathbf{y}(t+1)$, untuk suatu $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sedemikian sehingga $\det(F + T\mathcal{K}) \neq 0$. Dengan $\mathbf{w}(t) = -\mathcal{K}\mathbf{y}(t+1)$, sistem (I.1) dapat diubah menjadi

$$(F + T\mathcal{K})\mathbf{y}(t+1) = S\mathbf{y}(t). \tag{I.3}$$

Jelas bahwa jika $\det(F + T\mathcal{K}) \neq 0$, maka sistem (I.3) menjadi normal, yaitu

$$\mathbf{y}(t+1) = (F + T\mathcal{K})^{-1}S\mathbf{y}(t). \tag{I.4}$$

Dalam skripsi ini akan dibicarakan masalah normalisasi positif dari sistem (I.1) yaitu bagaimana syarat matriks $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sedemikian sehingga $\det(F + T\mathcal{K}) \neq 0$ dan solusi dari sistem (I.4) adalah positif, yaitu $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n_+$.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas berdasarkan latar belakang pada penelitian ini adalah bagaimana syarat matriks $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sedemikian sehingga $\det(F + T\mathcal{K}) \neq 0$ dan sistem (I.1) adalah normal dan positif, yaitu $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n_+$.

1.3 Pembatasan Masalah

Pembatasan masalah pada skripsi ini yaitu matriks F, S dan T adalah matriks riil konstan.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penulisan skipsi ini adalah untuk menentukan $\mathbf{w}(t) = -\mathcal{K}\mathbf{y}(t+1)$, $t \in \mathbb{Z}_+$, sedemikian sehingga $\det(F + T\mathcal{K}) \neq 0$ dan sistem (I.4) adalah positif.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan tugas akhir ini terdiri dari empat bab. Bab I berisi latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan dan sistematika penulisan. Bab II merupakan landasan teori yang menjelaskan teori-teori dasar yang berkaitan dengan teori matriks dan sistem linier normal positif. Bab III berisikan pembahasan tentang permasalahan beserta hasil sistem singular diskrit positif. Selanjutnya Bab IV berisi kesimpulan dari penulisan ini.