

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Ruang norm merupakan suatu ruang vektor yang dilengkapi dengan fungsi yang disebut norm. Secara geometri, norm merupakan alat ukur sederhana untuk menghitung panjang suatu vektor. Lalu bagaimana dengan konsep luas? Pada kehidupan nyata, untuk mengukur luas daerah yang direntang oleh 2 vektor akan lebih rumit dan membutuhkan alat ukur yang lebih kompleks. Untuk menjawab permasalahan tersebut, Gähler (1964) mendefinisikan suatu alat ukur untuk menghitung luas tersebut. Misalkan X adalah ruang vektor. **Norm-2**, $\|\cdot, \cdot\|$ didefinisikan sebagai fungsi dari X^2 ke \mathbf{R} yang memenuhi sifat-sifat,

1. $\|x, y\| = 0$ jika dan hanya jika x dan y bergantung linier,
2. $\|x, y\| = \|y, x\|$, untuk setiap $x, y \in X$,
3. $\|\alpha x, y\| = |\alpha| \|x, y\|$, untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$,
4. $\|x + y, z\| \leq \|x, z\| + \|y, z\|$, untuk setiap $x, y, z \in X$.

Pasangan ruang vektor X yang dilengkapi dengan norm-2, $\|\cdot, \cdot\|$, yaitu $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ disebut **ruang norm-2**.

Selanjutnya, pandang ruang vektor ℓ^p . Ruang vektor ℓ^p adalah ruang yang memuat semua barisan bilangan riil yang memenuhi $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$. Ruang vektor ℓ^p yang dilengkapi oleh $\|\cdot\|_p$ adalah suatu ruang norm. Lebih lanjut pada [6] diketahui bahwa $(\ell^p, \|\cdot, \cdot\|_p)$ adalah suatu ruang Banach. Selain itu, ℓ^p juga dapat dipandang sebagai ruang norm-2, dengan norm-2 pada ℓ^p didefinisikan sebagai berikut.

$$\|x, y\|_p = \left[\frac{1}{2} \sum_k \sum_l \left| \det \begin{pmatrix} x_k & x_l \\ y_k & y_l \end{pmatrix} \right|^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Tugas akhir ini membahas bagaimana menunjukkan kelengkapan $(\ell^p, \|\cdot, \cdot\|_p)$ dengan menggunakan kelengkapan $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, rumusan masalah yang berkaitan adalah sebagai berikut.

1. Apakah norm-2 dapat didefinisikan pada suatu ruang vektor X ?
2. Apakah ruang vektor X beserta norm-2 yang memenuhinya adalah ruang norm-2 yang lengkap?

1.3 Pembatasan Masalah

Penulisan tentang ruang norm-2 dan kelengkapannya akan dibatasi dengan menggunakan ruang vektor ℓ^p beserta norm-2 yang memenuhinya. Jadi penulisan ini akan lebih terarah untuk mengetahui kelengkapan ℓ^p sebagai ruang norm-2.

1.4 Tujuan

Setiap penulisan suatu karya ilmiah tidak akan terlepas dari tujuan yang akan dicapai, agar penulisan tersebut memiliki makna dan berguna bagi setiap yang membaca karya ilmiah ini. Tujuan yang akan dicapai dalam karya ilmiah ini merupakan jawaban dari masalah yang telah dikemukakan sebelumnya, yaitu memberikan pandangan secara geometri dalam melihat ℓ^p sebagai ruang norm-2, khususnya dalam melihat kelengkapannya.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini dibagi menjadi empat bab. Bab I berisi latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan. Pada Bab II dijelaskan mengenai ruang norm dan ruang norm-2. Bab III memuat kelengkapan ℓ^p sebagai ruang norm-2. Kesimpulan dari hasil pembahasan terdapat pada Bab IV.