

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Operator *vec* merupakan suatu operator yang mengoperasikan suatu matriks dengan aturan tertentu yang mengubah suatu matriks menjadi vektor kolom. Operator *vec* mengubah matriks menjadi vektor kolom dengan menyusun kolom pertama sampai kolom terakhir dari suatu matriks secara vertikal [14].

Pada tahun 1979, Henderson dan Searle [6] mendefinisikan suatu operator *vech* untuk matriks simetri dengan cara yang sama seperti operator *vec*, kecuali entri yang terletak di atas diagonal utama. Dalam hal ini berarti operator *vech* digunakan untuk mengubah suatu matriks simetri menjadi vektor kolom dengan menyusun kolom pertama sampai kolom terakhir tanpa entri di atas diagonal utama. Selain itu, Henderson dan Searle [6] mengaplikasikan operator *vec* dan *vech* dalam mengembangkan hasil statistik multivariat yaitu metode statistik yang memungkinkan dilakukan penelitian terhadap satu atau lebih dari dua variabel secara bersamaan. Pada tahun yang sama, Szatrowski [15] mempunyai gagasan baru untuk mengubah suatu matriks simetri menjadi vektor kolom dengan cara yang berbeda dari Henderson dan Searle [6]. Szatrowski [15] mendefinisikan operator *vec* baru yang dinotasikan dengan $\langle A \rangle$

untuk mengubah matriks simetri A menjadi vektor kolom dengan menyusun entri diagonal utama kemudian entri di atas diagonal utama dimulai dari baris pertama sampai baris terakhir. Kemudian, Szatrowski [15] mengaplikasikan operator $\langle A \rangle$ tersebut untuk menemukan hasil turunan dari estimasi maksimum *likelihood* dan uji rasio *likelihood*.

Pada tahun 1980, Magnus dan Neudecker [10] memberlakukan operator *vech* yang sebelumnya digunakan khusus untuk suatu matriks simetri [6] menjadi umum untuk suatu matriks bujur sangkar. Magnus dan Neudecker [10] juga menggunakan istilah *supradiagonal* untuk mendefinisikan operator *vech*. *Supradiagonal* merupakan entri-entri yang terletak di atas diagonal utama dari suatu matriks bujur sangkar. Magnus dan Neudecker [10] mendefinisikan operator *vech* sebagai vektor kolom yang diperoleh dari operator *vec* dengan menghilangkan entri *supradiagonal*. Selanjutnya, pada tahun 1988, Jinadasa [8] menggunakan operator *vech* yang didefinisikan oleh Henderson dan Searle [6] serta menggunakan operator $\langle A \rangle$ yang didefinisikan oleh Szatrowski [15] untuk membuktikan berbagai hasil yang berkaitan dengan matriks simetri dan memperoleh matriks varians-kovarians dari distribusi Wishart dalam bentuk *nonsingular* yang biasa digunakan dalam bidang statistika.

Seiring berkembangnya zaman, pada tahun 1991, Koning dkk. [9] mempunyai gagasan baru dalam mendefinisikan operator matriks baru yaitu *vecb* yang berkaitan dengan matriks blok dan hasil kali Kronecker, sedangkan pada tahun 2017, Nagakura [11, 12] mengkaji penelitian yang dilakukan oleh Henderson dan Searle [6], Magnus dan Neudecker [10], serta Szatrowski [15]

untuk mendefinisikan dua operator matriks baru yaitu operator $vecp$ dan $vecd$. Operator $vecp$ mengubah suatu matriks bujur sangkar menjadi vektor kolom dengan menyusun entri diagonal utama kemudian entri pada kolom pertama sampai kolom terakhir dengan menghilangkan entri diagonal utama dan entri supradiagonal [11]. Operator $vecd$ mengubah suatu matriks bujur sangkar menjadi vektor kolom dengan menyusun entri diagonal utama kemudian entri diagonal di bawah diagonal utama dan seterusnya [12]. Dalam pengaplikasiannya, operator $vecp$ digunakan untuk memperoleh bentuk eksplisit uji Wald yang mudah dari berbagai hipotesis *null* terkait matriks kovarians dari distribusi normal multivariat [11], sedangkan operator $vecd$ digunakan untuk memperoleh bentuk eksplisit uji Wald dari distribusi normal multivariat dan untuk memperoleh matriks varians dalam model GARCH multivariat [12]. Selain itu, Nagakura [11, 12] menemukan dan membuktikan beberapa sifat dan hubungan antara $vech$, $vecp$, $vecd$ dengan matriks duplikasi dan matriks komutasi.

Pada penelitian ini didefinisikan dua operator matriks baru yang disebut sebagai operator $vech^*$ dan $vecp^*$. Peneliti mengkaji penelitian yang dilakukan oleh Magnus dan Neudecker [10] untuk mendefinisikan operator $vech^*$ dan Nagakura [11] untuk mendefinisikan operator $vecp^*$. Magnus dan Neudecker [10] serta Nagakura [11] masing-masing mendefinisikan operator $vech$ dan $vecp$ dengan memanfaatkan entri segitiga bawah dari suatu matriks bujur sangkar. Di sisi lain, peneliti mendefinisikan operator $vech^*$ dan $vecp^*$ dengan memanfaatkan entri segitiga atas dari suatu matriks bujur sangkar.

Entri segitiga atas yang dimaksud adalah entri diagonal utama dan entri supradiagonal. Selain itu, pada penelitian ini akan diselidiki bentuk matriks yang menghubungkan antara operator $vech^*$, $vecp^*$, dan vec , serta beberapa sifat dari matriks tersebut dan keterkaitannya dengan matriks permutasi, komutasi, dan duplikasi.

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana pendefinisian operator $vech^*$ dan $vecp^*$?
2. Apa bentuk umum dari matriks yang mentransformasikan $vech^*$ menjadi $vecp^*$, $vech^*$ menjadi vec , dan $vecp^*$ menjadi vec ?
3. Bagaimana sifat dari matriks tersebut dan hubungannya dengan matriks permutasi, duplikasi, dan komutasi?

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi oleh pendefinisian operator $vech^*$ dan $vecp^*$ untuk matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mendefinisikan operator $vech^*$ dan $vecp^*$.

2. Mengetahui bentuk umum dari matriks yang mentransformasikan $vech^*$ menjadi $vecp^*$, $vech^*$ menjadi vec , dan $vecp^*$ menjadi vec .
3. Mengetahui sifat dari matriks tersebut dan hubungannya dengan matriks permutasi, duplikasi, dan komutasi.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam tesis ini adalah sebagai berikut: Bab I Pendahuluan yang berisi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan; Bab II Tinjauan Pustaka berisi teori dasar, definisi, teorema, dan notasi yang digunakan sebagai acuan pada pembahasan; Bab III Pembahasan berisi uraian analisis terkait hasil yang diperoleh mengenai operator $vech^*$, $vecp^*$ dan vec ; Bab IV Kesimpulan berupa ringkasan dari hasil penelitian; dan Daftar Pustaka.

