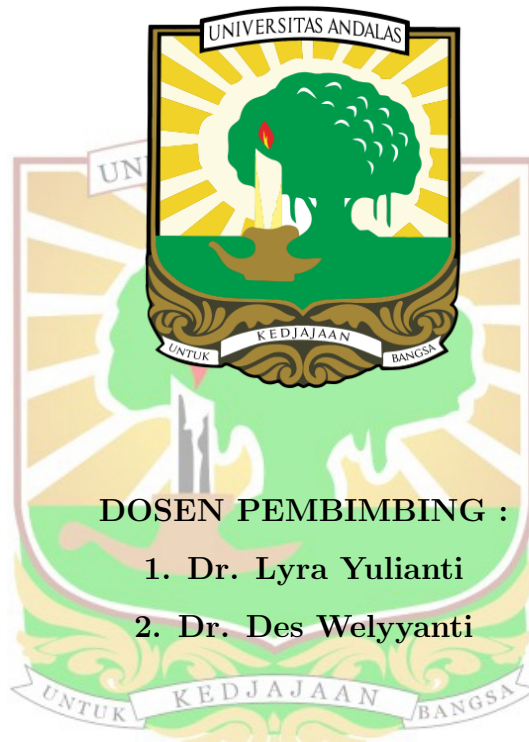


DIMENSI METRIK DARI GRAF PALEM
SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA

OLEH :
MELLANY
BP. 1810432069



DOSEN PEMBIMBING :

- 1. Dr. Lyra Yulianti**
- 2. Dr. Des Welyyanti**

DEPARTEMEN MATEMATIKA DAN SAINS DATA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG

2023

TANDA PERSETUJUAN SKRIPSI

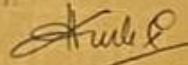
Dengan ini dinyatakan bahwa

Nama : Mellany
No. Buku Pokok : 1810432069
Jurusan : Matematika
Bidang : Matematika Kombinatorik
Judul Skripsi : Dimensi Metrik Dari Graf Palem

telah diuji dan disetujui skripsinya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) melalui ujian sarjana yang diadakan pada tanggal 1 Februari 2023 berdasarkan ketentuan yang berlaku.

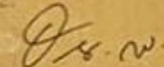
Pembimbing,

1.



Dr. Lyra Yulianti
NIP.197507061999032003

2.



Dr. Des Welyyanti
NIP.197912052008122001

Penyaji,

1.



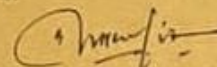
Narwen, M.Si
NIP.196704101997021001

2.



Dr. Ahmad Iqbal Bad
NIP.196710121994021001

3.



Nova Noliza Bakar, M.Si
NIP.196311041992032002

Mengesahmi,
Ketua Departemen Matematika dan Sains Data FMIPA UNAND



NIP. 197211032003122001

HALAMAN PERSEMBAHAN



"Allah akan mengangkat derajat orang-orang beriman diantaramu dan orang-orang yang diberi ilmu beberapa derajat. Dan Allah maha teliti apa yang kamu kerjakan."

(QS.Al-Mujadalah : 11)

Barang siapa yang menapaki suatu jalan dalam rangka mencari ilmu maka Allah akan memudahkan baginya jalan ke Surga.

(H.R. Ibnu Majah dan Abu Daud)

Alhamdulillah rabbil'alam, segala puji syukur kehadiran **Allah Subhanahu Wa Ta'ala** yang Maha Berkuasa dan Berkehendak atas segala sesuatu sehingga atas limpahan nikmat-Nya penulis dapat memperoleh gelar sarjana sains. *Allahumma shalli'ala Muhammad*, semoga Allah menyampaikan kepada nabi Muhammad *Shallallahu Alaihi Wa Sallam*, dan kita berada di antara golongan Beliau di Akhirat kelak.

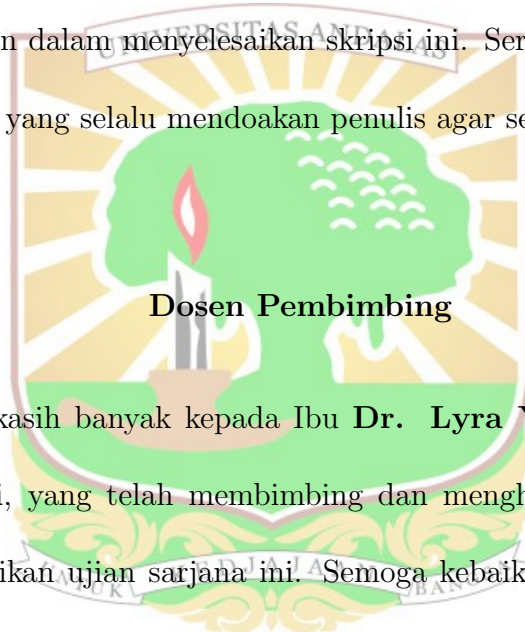
Tulisan ini penulis persembahkan untuk kedua orang tua penulis, Ayah **Gusyanto** dan Ibu **Imah** tercinta yang telah menjadi alasan perjuangan penulis menyelesaikan perkuliahan ini.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, dorongan, kerjasama maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang

kepada semua pihak yang telah membantu penulisan skripsi ini, terutama kepada:

Keluarga Tercinta

Terimakasih banyak kepada Ayahanda tercinta **Gusyanto** dan Ibunda tercinta **Imah** yang tiada hentinya memberikan semangat kepada saya serta doa, nasehat, dan pengorbanan yang tak terhitung banyaknya. Terimakasih juga kepada adikku terkasih **Hata Saputra** yang telah memberikan dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini. Serta terimakasih kepada seluruh keluarga yang selalu mendoakan penulis agar segera lulus menjadi seorang sarjana.



Terimakasih banyak kepada Ibu **Dr. Lyra Yulianti** dan Ibu **Dr. Des Welyyanti**, yang telah membimbing dan menghantarkan saya hingga dapat menyelesaikan ujian sarjana ini. Semoga kebaikan bapak dibalas oleh Allah SWT. Aamiin. Penulis bersyukur telah dibimbing oleh dua dosen hebat Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Andalas. Selanjutnya, penulis memohon maaf apabila selama pengerjaan skripsi ini telah banyak menyusahkan bapak. Semoga kebaikan ibu dibalas oleh Allah. *Aamiin.*

Dosen Penguji

Terimakasih kepada Bapak **Narwen, M.Si**, bapak **Dr. Ahmad Iqbal Baqi**, dan ibu **Nova Noliza Bakar, M.Si**, selaku dosen penguji

yang telah memberikan kritik, saran, serta masukan sehingga skripsi ini menjadi lebih baik. Saya memohon maaf apabila selama perbaikan skripsi saya menyusahakan bapak dan ibu. Semoga semua kebaikan yang bapak dan ibu berikan dibalas oleh Allah. Aamiin.

Dosen Pembimbing Akademik

Terimakasih penulis ucapkan kepada ibu ***Dr. Lyra Yulianti***, selaku dosen pembimbing akademik yang dengan sabar telah membantu dan membimbing penulis dari awal hingga akhir masa perkuliahan, yang senantiasa memberikan saran dan masukan kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan masa perkuliahan penulis. Semoga kebaikan ibu dibalas oleh Allah SWT. *Aamiin*.

Dosen Departemen Matematika dan Sains Data UNAND

Teruntuk dosen hebat, Ibu ***Dr. Yanita***, selaku Ketua Departemen Matematika dan Sains Data FMIPA UNAND, penulis ucapkan terima kasih atas bimbingan dan dukungannya selama ini. Selanjutnya terima kasih kepada seluruh dosen Matematika dan Sains Data FMIPA UNAND, terima kasih atas motivasi, nasehat, pengalaman, dan kebaikan yang Bapak dan Ibu berikan selama ini. Semoga Bapak dan Ibu semuanya selalu dalam lindungan Allah SWT. Aamiin.

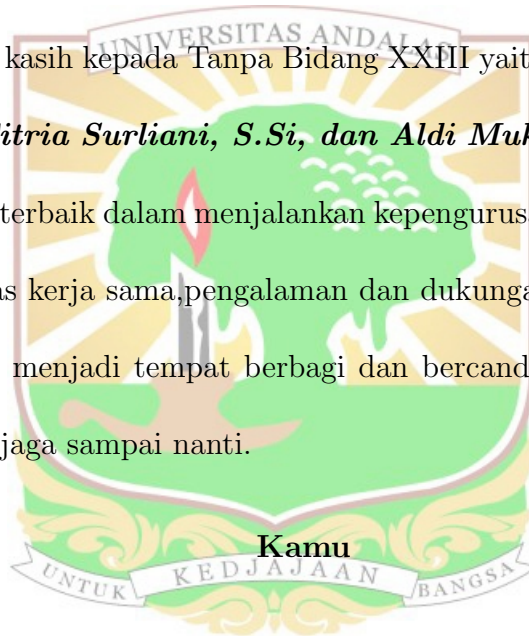
Rangsusah

Terimakasih kepada sahabat saya di perkuliahan ***Habibatus Salmi, S.Si, Cindy Cintya Sari, S.Si, Bima Saputera, S.Si, Nuzul Wahyudi***

yang memotivasi, semangat , dan sangat memberika warna perkulihan saya di setiap harinya. Terspesial **Umi** sayang terimakasih selalu jadi tempatku berkeluh kesah, dan untuk **Habiba** yang selalu jadi partner pirkku tau dark mod amelia, makasih selalu ada, bahkan terakhir aku di kota orang ini, dan untuk **Little gril** "you always best partner". Terimakasih semua telah menjadi kisah yang akan selalu ku kenang di Rantau ini . *Miss you!*

Tanpa Bidang XVIII

Terima kasih kepada Tanpa Bidang XXIII yaitu **Adinda Putri Dinanty, S.Si, Fitria Surliani, S.Si, dan Aldi Mukhlis, S.Si** yang telah menjadi partner terbaik dalam menjalankan kepengurusan HIMATIKA XXIII. Terima kasih atas kerja sama, pengalaman dan dukungannya selama ini. Terima kasih sudah menjadi tempat berbagi dan bercanda. Semoga keakraban ini bisa terus terjaga sampai nanti.



Terimakasih selalu meluangkan waktu, *support* yang tiada henti yang selalu membuat saya selalu ingin lebih baik dalam menyelesaikan skripsi ini, dan teman healing yang tau seberapa gilanya prosesku. *Nice to meet u*

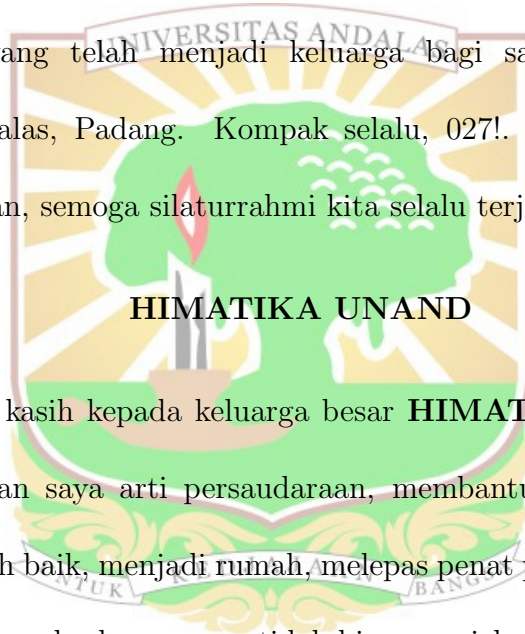
Geometri-18

Terimakasih kepada teman-teman saya **Laila Hidayati, M. Rafif Fajri, Putri Zukhairah, Alifaziz Arsyad, Tasya Halilla** rekan diskusi saya. Terima kasih seterusnya kepada seluruh teman-teman **Geometri18**

yang tidak bisa disebutkan satu persatu yang telah mewarnai kehidupan saya diperkuliahan. Semoga semua urusan dilancarkan oleh Allah SWT dan cepat wisuda semua. *See u on top guys!*

Keluarga BP 027

Terimakasih banyak kepada ***Nadya Citra Multasya, S.Si*** dan ***Rizka Idil Adhani***, saudara bp saya yang telah menemani, membantu dan mendukung selama perkuliahan. Terima kasih juga kepada uda, uni, serta adik-adik BP yang telah menjadi keluarga bagi saya selama kuliah di Universitas Andalas, Padang. Kompak selalu, 027!. Maaf jika selama ini sering merepotkan, semoga silaturahmi kita selalu terjaga sampai kapanpun.



Terima kasih kepada keluarga besar **HIMATIKA UNAND** yang telah mengajarkan saya arti persaudaraan, membantu saya untuk menjadi pribadi yang lebih baik, menjadi rumah, melepas penat perkuliahan dan untuk seluruh pengalaman berharga yang tidak bisa saya jelaskan dengan kata-kata. Terima kasih kepada rekan-rekan **Pengurus HIMATIKA XXIII**. Semoga Allah SWT selalu memberkahi apapun kegiatan HIMATIKA UNAND dan jaya selalu HIMATIKA. Aamiin.

Mellany

"Tidak ada batasan untuk mimpimu, jadi mulai dan nikmati prosesnya.

Semua bisa dibeli namun tidak dengan proses."

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbillalamin, segala puji atas kehadiran Allah SWT yang telah memberikan rahmat, hidayah, dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "*Dimensi Metrik Dari Graf Palem*" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Departemen Matematika dan Sains Data, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas, Padang. Shalawat dan Salam semoga selalu tercurahkan kepada junjungan kita Rasulullah SAW yang telah membawa iman dan ilmu pengetahuan kepada umat manusia.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, dorongan, kerjasama maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah membantu penulisan skripsi ini, terutama kepada:

1. Ibu **Dr. Lyra Yulianti** dan Ibu **Dr. Des Welyyanti**, selaku dosen pembimbing yang dengan sabar telah memberikan banyak pengarahan, masukan, waktu, perhatian, dan motivasi kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan benar.
2. Bapak **Narwen, M.Si**, bapak **Dr. Ahmad Iqbal Baqi**, dan ibu **Nova Noliza Bakar, M.Si**, selaku dosen penguji yang telah memberikan kritikan dan saran guna menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

3. Ibu **Dr. Lyra Yulianti**, selaku dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan semangat, nasehat, motivasi, ilmu, serta membantu penulis dalam menyelesaikan studi.
4. Ibu **Dr. Yanita** selaku Ketua Departemen Matematika dan Sains Data, beserta seluruh **Bapak Ibu Dosen beserta Staf Departemen Matematika dan Sains Data**, yang telah memberikan ilmu, nasehat, pengajaran dengan penuh kesabaran dan pengorbanan yang telah membantu penulis selama melaksanakan studi.
5. **Laila Hidayati, M. Raffi Fajri, Putri Zukhairah, Alifaziz Arsyad** selaku teman2 seperjuangan yang membantu, memberi semangat dan terimakasih untuk **Uda M. Azhari** yang telah sabar membantu penulis selama menyelesaikan skripsi.
6. Semua pihak yang telah membantu selama penulisan skripsi ini.

Ucapan terima kasih tiada tara untuk keluarga tercinta yang berada di Batam yaitu: untuk Abeku tersayang **Gusyanto** dan yang tercinta Mamaku **Imah** yang selalu memberi doa, dukungan, semangat, kasih sayang, motivasi, dan nasehat selama penulis menempuh pendidikan. Serta Adik-adik terkasih **Hata Saputra** yang sel.alu menghibur dikala stress, Acik **Umiyati**, dan Abang **Diki Fernando** yang telah memberi doa, dukungan, semangat, dan kasih sayang selama menempuh pendidikan.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis mengharapkan

kritik dan saran dari pembaca agar kelak diperoleh hasil yang lebih baik. Penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang memerlukannya. Amin.

Padang, Februari 2023

Mellany, S.Si

(Meanyy27@gmail.com)



ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan mencari dimensi metrik dari garf palem $C_k P_l S_m$, untuk $k \geq 3, l \geq 2$ dan $m \geq 2$. Graf Palem $C_k P_l S_m$ merupakan graf yang dibangun oleh tiga graf, yaitu Graf Lingkaran C_k , Graf Lintasan P_l , dan Graf Bintang S_m . Penelitian ini diperoleh bahwa dimensi metrik graf palem adalah m , $\dim(H) = m$.

Kata Kunci : *Dimensi metrik, Himpunan Pembeda, Graf Palem, Representasi.*



ABSTRACT

This paper discusses the metric dimension of the palm graph $C_k P_l S_m$, for $k \geq 3, l \geq 2$ and $m \geq 2$. The palm graph $C_k P_l S_m$ constructed by graph cycle C_k , graph path P_l , graph star S_m . This research obtained that the metric dimension of palm graphs is m , $dim(H) = m$.

Keywords : Metric dimension, Resolvingset, Representation, Palm Graph.



DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	vii
ABSTRAK.	x
ABSTRACT	xi
DAFTAR ISI.	xii
BAB I PENDAHULUAN.	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan Penelitian	2
1.4 Sistematika Penulisan	2
BAB II LANDASAN TEORI	4
2.1 Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf	4
2.2 Graf Palem	7
2.3 Dimensi Metrik pada Graf	9
BAB III DIMENSI METRIK GRAF PALEM.	12
3.1 Dimensi Metrik $C_k P_l S_m$ untuk $k \geq 3, l \geq 2$ dan $m \geq 2$	12
BAB IV KESIMPULAN.	17
DAFTAR PUSTAKA.	18
RIWAYAT HIDUP.	20

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang sudah ada sejak lebih dari tiga ratus tahun yang lalu. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 ketika mencoba membuktikan kemungkinan seseorang untuk melewati empat daerah yang dihubungkan dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di Konisberg, Prussia dalam sekali waktu. Graf digunakan untuk merepresentasikan masalah jembatan Konisberg tersebut, dengan mengilustrasikan keempat daerah sebagai titik dan ketujuh jembatan diilustrasikan sebagai sisi.

Seiring perkembangan ilmu pengetahuan, muncul kajian-kajian baru di bidang teori graf, salah satunya adalah dimensi metrik. Dimensi metrik pada graf pertama kali diperkenalkan secara terpisah oleh Slater pada tahun 1975 [?] dan oleh Harary dan Melter pada tahun 1976 [5].

Pada penelitian ini akan dibahas tentang penentuan dimensi metrik graf palem. Graf Palem $C_k P_l S_m$ merupakan graf yang dibangun oleh tiga graf, yaitu Graf Lingkaran C_k , Graf Lintasan P_l , dan Graf Bintang S_m , untuk $k \geq 3, l \geq 2$ dan $m \geq 2$ dengan penambahan beberapa sisi di antara ketiga graf tersebut.

Riyando dkk. [9] menunjukkan bahwa dimensi metrik dari graf $K_1 + mK_4$ untuk $m \geq 2$, adalah $dim(K_1 + mK_4) = 3m$. Putra dkk. [7] menunjukkan bahwa dimensi metrik graf $W_n + C_n$ untuk $n \in \{3, 4\}$ adalah $dim(W_3 + C_3) = 6$

dan $\dim(W_4 + C_4) = 4$. Febrianti dkk. [4] menentukan bahwa dimensi metrik graf amalgamasi tangga segitiga diperumum homogen, dinotasikan $Amal\{Tr_n, v\}_2$ adalah tiga untuk $n = 3$ dan empat untuk $n = 4$. Angraini dkk. [?] menentukan dimensi metrik dan dimensi partisi dari graf tangga segitiga Tr_n , dimana untuk $n = 2$ dan $n = 3$ diperoleh bahwa dimensi metrik $\dim(Tr_n) = 2$ dan dimensi partisi $pd(Tr_n) = 3$. Putri dkk. [8] menentukan bahwa dimensi metrik graf amalgamasi tangga segitiga diperumum homogen, dinotasikan $Amal(Tr_n, v)_m$ adalah lima untuk $n = 5$ dan $m = 3$. Aditya dkk. [1] menentukan dimensi metrik dari subdivisi graf Lobster $R_n(q; r)m$, dimana dimensi metrik dari graf $R_n(1; 1)m$ untuk $n > 2$ adalah 2, dimensi metrik dari graf $R_n(q; 1)m$ untuk $n \geq 2, q \geq 2$ adalah $n(q - 1)$ dan dimensi metrik dari graf $R_n(q; r)m$ untuk $n \geq 2, q \geq 2, r \geq 2$ adalah $nq(r - 1)$.

1.2 Rumusan Masalah

Perumusan masalah pada penelitian ini adalah berapa dimensi metrik dari graf palem, dinotasikan sebagai C dimana $k \geq 3, l \geq 2$ dan $m \geq 2$.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan dimensi metrik dari graf palem, dinotasikan sebagai $C_k P_l S_m$ dimana $k \geq 3, l \geq 2$ dan $m \geq 2$.

1.4 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut: Bab I Pendahuluan, yang memberikan gambaran singkat tentang latar belakang, rumusan masalah, serta tujuannya. Bab II Landasan teori, yang mem-

bahas mengenai teori-teori sebagai dasar acuan yang digunakan dalam pembahasan dan mendukung masalah yang dibahas. Bab III Pembahasan, memuat tentang dimensi metrik dari graf palem. Bab IV Penutup, berisi kesimpulan dari penelitian. Hasil baru pada penelitian ini diberi tanda \diamond .

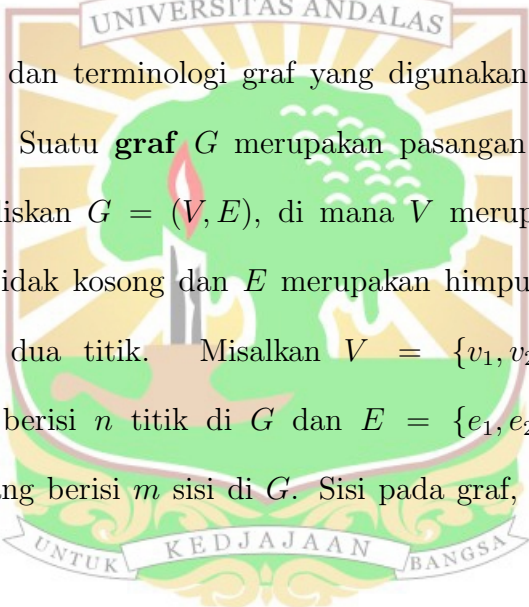


BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dijelaskan beberapa materi pendukung yang akan digunakan dalam menentukan dimensi metrik dari graf palem yang dinotasikan sebagai $C_k P_l S_m$ dimana $k \geq 3$, $l \geq 2$ dan $m \geq 2$.

2.1 Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf



Definisi dan terminologi graf yang digunakan dalam penelitian ini dikutip dari [3]. Suatu **graf** G merupakan pasangan himpunan V dan E yang dapat dituliskan $G = (V, E)$, di mana V merupakan himpunan titik (*vertices*) yang tidak kosong dan E merupakan himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan dua titik. Misalkan $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ merupakan himpunan yang berisi n titik di G dan $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ merupakan himpunan sisi yang berisi m sisi di G . Sisi pada graf, dapat juga dituliskan dengan $v_i v_j$.

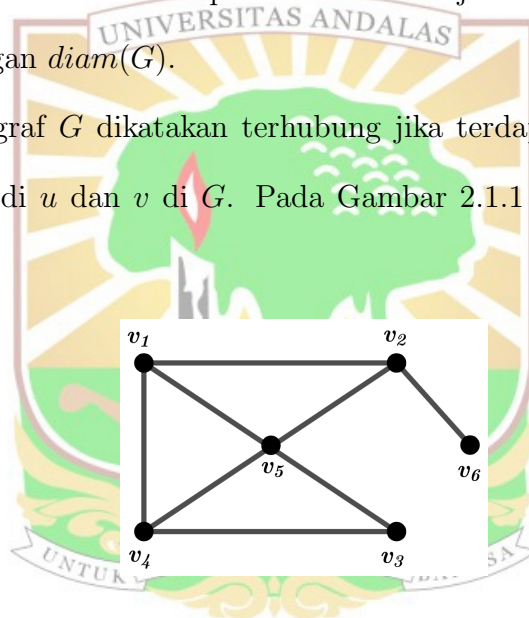
Misalkan terdapat suatu sisi di antara titik v_i dan v_j , maka titik v_i dan v_j dikatakan **terkait** (*incident*) dengan sisi e , dan kedua titik tersebut dikatakan **bertetangga** (*adjacent*). **Derajat** (*degree*) suatu titik di G merupakan banyaknya sisi yang terkait dengan $v \in V(G)$, dapat dinotasikan dengan $deg(v)$. **Loop** merupakan suatu sisi yang memiliki titik awal dan titik ujung yang sama. Kardinalitas dari himpunan titik $V(G)$ disebut **orde** pada G , dinotasikan dengan $|V(G)|$. Kardinalitas dari himpunan sisi $E(G)$ disebut **ukuran** (*size*) pada G , dinotasikan dengan $|E(G)|$. Graf yang hanya memiliki satu titik dan tidak memiliki sisi dinamakan graf trivial. Titik

terpencil (*isolated vertex*) merupakan titik yang tidak mempunyai tetangga.

Jalan (*walk*) merupakan suatu barisan berhingga dari titik dan sisi di G dapat ditulis sebagai $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$ dimana $e_i \in E(G)$ untuk $1 \leq i \leq k$. Titik v_0 dan titik v_k berturut-turut disebut titik awal dan titik akhir. Panjang dari jalan adalah banyaknya sisi dari barisan tersebut.

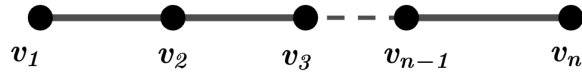
Lintasan adalah jalan yang melewati semua titik dan sisi yang berbeda. Panjang lintasan adalah banyaknya sisi yang terdapat di dalam lintasan. **Jarak** merupakan panjang lintasan terpendek dari u ke v di G , dinotasikan dengan $d(u, v)$. **Diameter** dari G merupakan maksimum jarak antara dua titik di G , dinotasikan dengan $diam(G)$.

Suatu graf G dikatakan terhubung jika terdapat lintasan di antara setiap dua titik di u dan v di G . Pada Gambar 2.1.1 diberikan contoh graf terhubung.



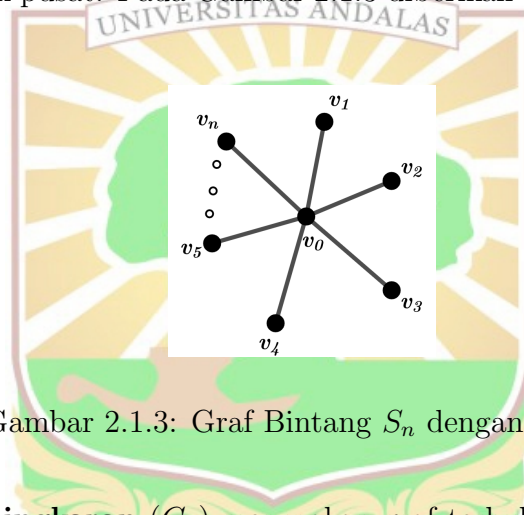
Gambar 2.1.1: Graf Terhubung.

Graf Lintasan (P_n) merupakan suatu graf terhubung yang memiliki tepat satu lintasan dengan n titik, $n \geq 2$. Pada Gambar 2.1.2 diberikan contoh graf lintasan P_n untuk $n \geq 2$.



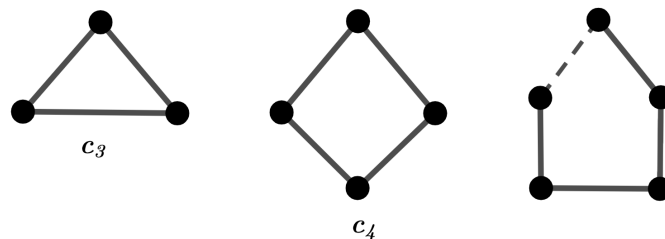
Gambar 2.1.2: Graf Lintasan P_n untuk $n \geq 2$.

Graf Bintang (S_n) merupakan suatu graf terhubung yang memiliki $n - 1$ titik berderajat satu yang disebut daun dan satu titik berderajat n yang disebut titik pusat. Pada Gambar 2.1.3 diberikan contoh graf bintang S_n untuk $n \geq 2$.



Gambar 2.1.3: Graf Bintang S_n dengan $n \geq 2$.

Graf Lingkaran (C_n) merupakan graf terhubung yang mempunyai n titik yang setiap titiknya berderajat 2, dengan $n \geq 3$. Pada Gambar 2.1.4 diberikan contoh graf lingkaran C_n untuk $n \geq 3$.



Gambar 2.1.4: Graf Lingkaran C_n untuk $n \geq 3$.

2.2 Graf Palem

Graf Palem dinotasikan sebagai $C_k P_l S_m$ merupakan graf yang dibangun oleh tiga graf, yaitu Graf Lingkaran C_k , Graf Lintasan P_l , dan Graf Bintang S_m dengan pusat v_0 , dengan $k \geq 3$, $l \geq 2$ dan $m \geq 2$ [6]. Graf palem $C_k P_l S_m$ dikonstruksi dengan cara:

Misalkan himpunan titik dan himpunan sisi untuk setiap graf C_k , P_l , dan S_m disajikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 V(C_k) &= \{u_1, u_2, \dots, u_k\}, \\
 V(P_l) &= \{w_1, w_2, \dots, w_l\}, \\
 V(S_m) &= \{v_0, v_1, \dots, v_m\}. \\
 E(C_k) &= \{u_1 u_2, u_2 u_3, u_3 u_4, u_4 \dots u_{k-1}, u_{k-1} u_k, u_k u_1\}, \\
 E(P_l) &= \{w_1 w_2, w_2 \dots w_l\}, \\
 E(S_m) &= \{v_0 v_1, v_0 v_2, v_0 v_3, \dots, v_0 v_{m-1}, v_0 v_m\}.
 \end{aligned}$$

1. Menambahkan sisi e_1 diantara titik ujung lintasan graf P_l yang dinamakan w_l dengan salah satu titik di graf C_k . Tanpa mengurangi perumuman, pilih titik u_1 di graf lingkaran.
2. Menambahkan sisi e_2 diantara titik ujung lintasan graf P_l yang dinamakan w_l , dengan titik pusat dari graf bintang v_0 .

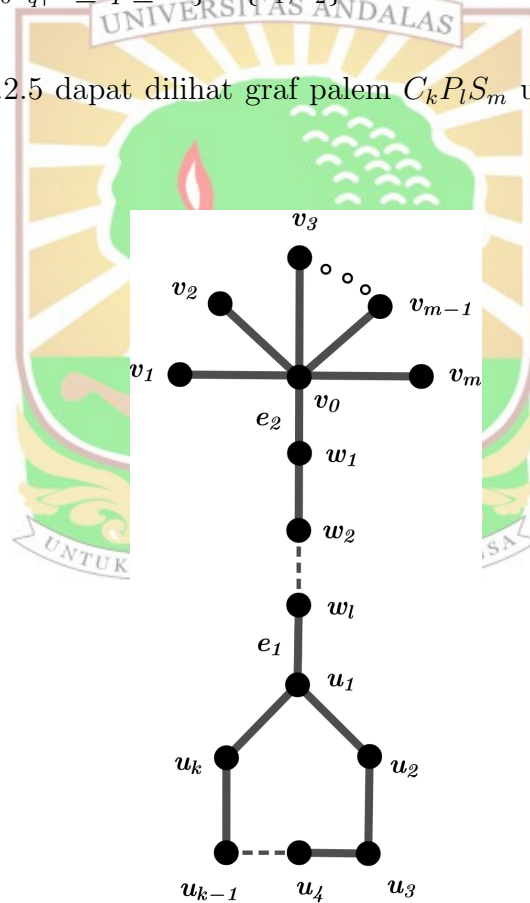
Dengan penambahan dua sisi tersebut, diperoleh himpunan titik dari himpunan sisi dari graf palem $C_k P_l S_m$ dengan $k \geq 3$, $l \geq 2$ dan $m \geq 2$

sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 V(H) &= V(C_k P_l S_m) \\
 &= V(C_k) \cup V(P_l) \cup V(S_m) \\
 &= \{u_i | 1 \leq i \leq k\} \cup \{w_j | 1 \leq j \leq l\} \cup \{v_s | 0 \leq s \leq m\}. \quad (2.2.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(H) &= E(C_k P_l S_m) \\
 &= E(C_k) \cup E(P_l) \cup E(S_m) \cup \{u_1 w_l, w_1 v_0\} \\
 &= \{u_t u_{t+1} | 1 \leq t \leq k-1\} \cup \{u_1 u_k\} \cup \{w_p w_{p+1} | 1 \leq p \leq l-1\} \cup \\
 &\quad \{v_0 v_q | 1 \leq q \leq m\} \cup \{e_1, e_2\}. \quad (2.2.2)
 \end{aligned}$$

Pada Gambar 2.2.5 dapat dilihat graf palem $C_k P_l S_m$ untuk $k \geq 3, l \geq 2$ dan $m \geq 2$.



Gambar 2.2.5: Graf Palem $C_k P_l S_m$ untuk $k \geq 3, l \geq 2$ dan $m \geq 2$.

2.3 Dimensi Metrik pada Graf

Dalam [2], Chartrand dkk memberikan definisi metrik dari suatu graf G sebagai berikut. Misalkan terdapat suatu graf terhubung yang dinotasikan dengan $G = (V, E)$, dimana terdapat dua titik $u, v \in V(G)$. Jarak antara u dan v , dinotasikan dengan $d(u, v)$, merupakan panjang lintasan terpendek di antara u dan v . Misalkan terdapat himpunan terurut (*ordered set*) $W \subseteq V(G)$, dengan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$. Misal terdapat titik $v \in V(G)$. Representasi titik v terhadap W , dinotasikan dengan $r(v|W)$, dimana

$$r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)).$$

Jika untuk setiap dua titik u dan v di G diperoleh bahwa $r(u|W) \neq r(v|W)$, maka W disebut sebagai **himpunan pembeda** (*resolving set*) untuk graf G . Himpunan pembeda mempunyai kardinalitas minimum yang disebut sebagai himpunan pembeda minimum (*minimum resolving set*). Banyaknya anggota dari himpunan pembeda minimum ini disebut **dimensi metrik** dari graf G , dinotasikan $dim(G)$. Berikut adalah teorema yang berkaitan dengan dimensi metrik suatu graf.

Teorema 2.3.1. [2] Misal G adalah graf terhubung dengan banyak titik $n \geq 2$, maka $dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$.

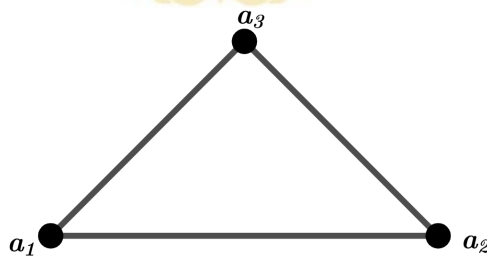
Bukti. (\Rightarrow) Diberikan graf terhubung G dan $v_i \in V(G)$, $1 \leq i \leq n$.

Misalkan graf G berdimensi metrik satu, maka akan dibuktikan graf G merupakan graf lintasan. Misalkan $W = \{w\}$ himpunan pembeda minimum pada graf G , dengan $|W| = 1$. Karena himpunan pembeda mempunyai kardinalitas 1, maka $r(v_i|W) = (d(v_i, W))$ untuk setiap $v_i \in V(G)$, dengan $d(v_i, W) = n-1$. Karena terdapat $d(v_i, W) = n-1$, maka terdapat lintasan dengan panjang $n-1$

di G . Karena terdapat lintasan dengan panjang $n - 1$ pada G , maka G adalah graf lintasan. Jadi, terbukti bahwa G merupakan graf lintasan.

(\Leftarrow) Jika graf G merupakan graf lintasan dan $v_i \in V(G)$ dengan $1 \leq i \leq n$ akan dibuktikan dimensi metrik graf G adalah satu. Misalkan $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ lintasan dengan panjang $n - 1$. Misalkan $W = \{v_1\}$, akan dibuktikan $W = \{v_1\}$ adalah himpunan pembeda. Karena $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ lintasan, maka $d(v_1, v_n) = n - 1$ untuk $1 \leq i \leq n$. Akibatnya, untuk setiap $u, v \in V(G)$ dengan $u \neq v$, maka $r(u|W) \neq r(v|W)$. Oleh karena itu, W dengan kardinalitas satu adalah himpunan pembeda. Selanjutnya akan dibuktikan $W = \{v_1\}$ himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum. Karena tidak ada himpunan pembeda dengan kardinalitas kurang dari satu, maka $W = \{v_1\}$ merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum. Dengan demikian, terbukti bahwa graf G berdimensi metrik 1. ■

Berikut merupakan contoh dimensi metrik untuk graf lengkap dapat dilihat pada contoh berikut ini. Misalkan $G = C_3$ merupakan graf lengkap dengan 3 titik. Akan ditunjukkan $dim(G) = 2$. □



Gambar 2.3.6: Graf G .

Akan ditunjukkan batas atas dimensi metrik graf G , terhadap W dengan menentukan himpunan W , $|W| = 2$ sedemikian sehingga representasi

setiap titik pada G berbeda terhadap W . Ambil himpunan $W = \{a_1, a_2\}$, diperoleh

$$r(a_1|W) = (d(a_1, a_1), d(a_1, a_2)) = (0, 1),$$

$$r(a_2|W) = (d(a_2, a_1), d(a_2, a_2)) = (1, 0),$$

$$r(a_3|W) = (d(a_3, a_1), d(a_3, a_2)) = (1, 1).$$

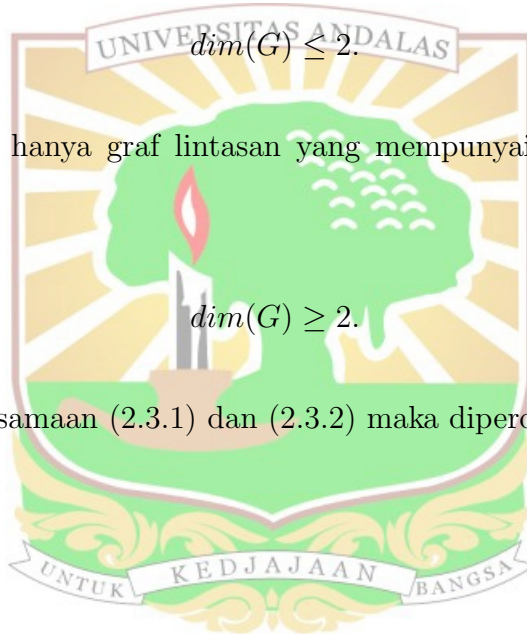
Karena $r(a_1|W) \neq r(a_2|W) \neq r(a_3|W)$ maka W merupakan himpunan pembeda untuk G , sehingga diperoleh

$$\dim(G) \leq 2. \tag{2.3.3}$$

Karena hanya graf lintasan yang mempunyai $\dim(P_n) = 1$, maka haruslah

$$\dim(G) \geq 2. \tag{2.3.4}$$

Berdasarkan persamaan (2.3.1) dan (2.3.2) maka diperoleh $\dim(G) = 2$.



BAB III

DIMENSI METRIK GRAF PALEM

Pada bab ini akan dibahas tentang penentuan dimensi metrik untuk graf palem, yang dinotasikan sebagai $C_k P_l S_m$ untuk $k \geq 3$, $l \geq 2$ dan $m \geq 2$.

3.1 Dimensi Metrik $C_k P_l S_m$ untuk $k \geq 3$, $l \geq 2$ dan $m \geq 2$.

Pada Teorema 3.1.1, akan dibahas tentang dimensi metrik dari graf palem yang dinotasikan $C_k P_l S_m$ untuk $k \geq 3$, $l \geq 2$ dan $m \geq 2$.

Teorema 3.1.1. \diamond Jika $H = C_k P_l S_m$ adalah graf palem dengan $k \geq 3$, $l \geq 2$ dan $m \geq 2$, maka $\dim(H) = m$.

Bukti. Diberikan suatu graf palem $H = C_k P_l S_m$ dengan $k \geq 3$, $l \geq 2$ dan $m \geq 2$, seperti pada gambar 2.2.5, dengan himpunan titik dan himpunan sisi seperti pada persamaan (2.2.1) dan (2.2.2)

Berikut disajikan karakteristik dari graf H berdasarkan jarak, dari suatu titik ke titik lainnya pada graf H tersebut.

1. Perhatikan bahwa pada graf H memuat titik berderajat satu v_i , dengan $1 \leq i \leq m$, maka setiap daun pada graf H akan memiliki jarak yang sama ke suatu titik $a \in V(H) - \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$. Berdasarkan gambar 2.2.5 diperoleh bahwa untuk titik v_0 memiliki jarak satu ke titik-titik yang merupakan daun, dengan demikian jarak titik lainnya $|W| \geq m - 1$.
2. Selanjutnya, akan dihitung jarak dari titik $u_i \in V(H)$ untuk $1 \leq i \leq k$ ke sebarang titik $a \in V(H) - V(C_k)$, yang akan dibagi menjadi beberapa kasus sebagai berikut.

- (a) Untuk C_k , k ganjil, maka diperoleh bahwa titik u_2 dan u_k berjarak sama ke titik a , titik u_3 dan u_{k-1} berjarak sama ke titik a , dan seterusnya hingga titik $u_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}$ dan $u_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2}$ berjarak sama ke titik a .
- (b) Untuk C_k , k genap, maka diperoleh bahwa titik u_2 dan u_k berjarak sama ke titik a , titik u_3 dan u_{k-1} berjarak sama ke titik a , dan seterusnya hingga titik $u_{\frac{k}{2}}$ dan $u_{\frac{k}{2} + 2}$ berjarak sama ke titik a .

Misalkan $H = C_k P_l S_m$ dimana $k \geq 3$, $l, m \geq 2$ memiliki $\dim(H)$ adalah b dengan $b \in \mathbb{N}$. Karena $\dim(H) = b$, maka terdapat suatu himpunan pembeda $W = \{x_1, x_2, \dots, x_b\}$. Berdasarkan karakteristik dari graf H pada poin ke-1 diperoleh bahwa sekurang-kurangnya anggota himpunan pada W adalah sebanyak $m - 1$ titik. Selanjutnya berdasarkan karakteristik dari graf H pada poin ke-2, diperoleh bahwa harus ada satu titik $u_i \in V(H)$ dimana $2 \leq i \leq k \subseteq W$ dengan ketentuan untuk k ganjil yaitu sebarang titik $u_i \in V(H)$ dimana $2 \leq i \leq k$ dan untuk k genap yaitu sebarang titik $u_i \in V(H)$ dimana $2 \leq i \leq k$ dan $i \neq \frac{k}{2} + 1$.

Berdasarkan informasi di atas diperoleh bahwa $|W| \geq (m-1) + 1 = m$. Ini berarti bahwa nilai $b \geq m$. Dengan demikian $\dim(H) \geq m$.

Selanjutnya, misalkan diberikan suatu himpunan pembeda W pada graf H yang disajikan sebagai berikut. Pilih $W = \{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, u_k\}$. Akan ditunjukkan bahwa W adalah himpunan pembeda, artinya semua titik akan mempunyai representasi yang berbeda terhadap W .

Berikut representasi titik-titik $v \in V(H)$ terhadap himpunan $W = \{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, u_k\}$ yang disajikan sebagai berikut.

$$r(v|W) = (d(v, v_1), d(v, v_2), \dots, d(v, v_{m-1}), d(v, u_k)).$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk setiap titik-titik pada H memiliki representasi yang berbeda ke himpunan W .

1. Untuk titik-titik $v_i \in V(H)$ dimana $0 \leq i \leq m$, $m \geq 2$.

$$r(v_0|W) = (1, 1, 1, \dots, 1, l+2),$$

$$r(v_1|W) = (0, 2, 2, \dots, 2, l+3),$$

$$r(v_2|W) = (2, 0, 2, \dots, 2, l+3),$$

$$r(v_3|W) = (2, 2, 0, \dots, 2, l+3),$$

$$r(v_4|W) = (2, 2, 2, 0, \dots, 2, l+3),$$

⋮

$$r(v_{m-1}|W) = (2, 2, 2, \dots, 0, l+3),$$

$$r(v_m|W) = (2, 2, 2, \dots, 2, l+3).$$

Karena $d(v_i, v_i) = 0$ dan $d(v_j, v_i) \neq 0$, untuk $i \neq j$ dan $1 \leq i, j \leq m-1$, maka representasi v_i dan v_j berbeda.

2. Untuk titik-titik $w_i \in V(H)$ dimana $1 \leq i \leq l$, $l \geq 2$.

$$r(w_1|W) = (2, 2, 2, \dots, 2, l+1),$$

$$r(w_2|W) = (3, 3, 3, \dots, 3, l),$$

$$r(w_3|W) = (4, 4, 4, \dots, 4, l-1),$$

⋮

$$r(w_{l-1}|W) = (l, l, l, \dots, l, 3),$$

$$r(w_l|W) = (l+1, l+1, l+1, \dots, l+1, 2).$$

Karena $d(w_i, v_i) \neq d(w_j, v_i)$, untuk $i \neq j$ dan $1 \leq i, j \leq l$, maka representasi w_i dan w_j berbeda.

3. Untuk titik-titik $u_i \in V(H)$ dimana $1 \leq i \leq k, k \geq 3$.

- Untuk nilai k ganjil.

$$r(u_1|W) = (l + 2, l + 2, l + 2, \dots, l + 2, 1),$$

$$r(u_2|W) = (l + 3, l + 3, l + 3, \dots, l + 3, 2),$$

$$r(u_3|W) = (l + 4, l + 4, l + 4, \dots, l + 4, 3),$$

\vdots

$$r(u_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}|W) = (l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1, l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1, l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1, \dots, l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$$

$$r(u_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}|W) = (l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2, l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2, l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2, \dots, l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor),$$

$$r(u_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2}|W) = (l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2, l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2, l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2, \dots, l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1),$$

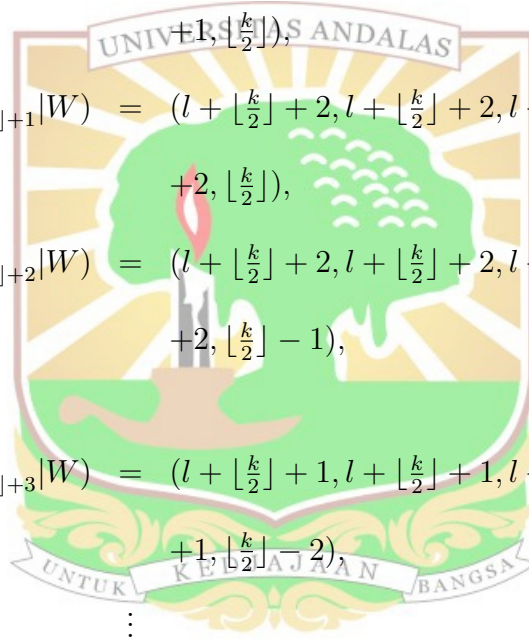
$$r(u_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 3}|W) = (l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1, l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1, l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1, \dots, l + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$$

$$+ 1, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 2),$$

\vdots

$$r(u_{k-1}|W) = (l + 4, l + 4, l + 4, \dots, l + 4, 1),$$

$$r(u_k|W) = (l + 3, l + 3, l + 3, \dots, l + 3, 0).$$



- Untuk nilai k genap.

$$\begin{aligned}
r(u_1|W) &= (l+2, l+2, l+2, \dots, l+2, 1), \\
r(u_2|W) &= (l+3, l+3, l+3, \dots, l+3, 2), \\
r(u_3|W) &= (l+4, l+4, l+4, \dots, l+4, 3), \\
&\vdots \\
r(u_{\frac{k}{2}-1}|W) &= (l+\frac{k}{2}, l+\frac{k}{2}, l+\frac{k}{2}, \dots, l+\frac{k}{2}, \frac{k}{2}-1), \\
r(u_{\frac{k}{2}}|W) &= (l+\frac{k}{2}+1, l+\frac{k}{2}+1, l+\frac{k}{2}+1, \dots, l+\frac{k}{2}+1, \frac{k}{2}), \\
r(u_{\frac{k}{2}+1}|W) &= (l+\frac{k}{2}+2, l+\frac{k}{2}+2, l+\frac{k}{2}+2, \dots, l+\frac{k}{2}+2, \frac{k}{2}-1), \\
r(u_{\frac{k}{2}+2}|W) &= (l+\frac{k}{2}+1, l+\frac{k}{2}+1, l+\frac{k}{2}+1, \dots, l+\frac{k}{2}+1, \frac{k}{2}-2), \\
&\vdots \\
r(u_{k-1}|W) &= (l+4, l+4, l+4, \dots, l+4, 1), \\
r(u_k|W) &= (l+3, l+3, l+3, \dots, l+3, 0).
\end{aligned}$$

Karena $d(u_i, v_i) \neq d(u_j, v_i)$, untuk $i \neq j$ dan $1 \leq i, j \leq k$, maka representasi u_i dan u_j berbeda.

Dari penyajian representasi di atas, dapat dilihat bahwa setiap titik pada H memiliki representasi yang berbeda. Oleh karena itu untuk himpunan pembeda $W = \{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, u_k\}$ dimana $|W| = m$, maka diperoleh bahwa $\dim(H) \leq m$.

Dari uraian di atas, terbukti bahwa asumsi $\dim(H) = b = m$ adalah benar. Disimpulkan untuk graf palem $H = C_k P_l S_m$ untuk $k \geq 3, l, m \geq 2$, maka $\dim(H) = m$. ■

□

BAB IV

KESIMPULAN

Graf Palem (H) = $C_k P_l S_m$ merupakan graf yang dibangun oleh tiga graf, yaitu Graf Lingkaran C_k , Graf Lintasan P_l , dan Graf Bintang S_m , dengan $k \geq 3$, $l, m \geq 2$, dengan himpunan titik dan sisi sebagai berikut

$$V(H) = \{u_i | 1 \leq i \leq k\} \cup \{w_j | 1 \leq j \leq l\} \cup \{v_s | 0 \leq s \leq m\}.$$

$$E(H) = \{u_t u_{t+1} | 1 \leq t \leq k-1\} \cup \{u_1 u_k\} \cup \{w_p w_{p+1} | 1 \leq p \leq l-1\} \cup \{v_0 v_q | 1 \leq q \leq m\} \cup \{e_1, e_2\}.$$

Hasil dari penelitian ini telah diperoleh bahwa dimensi metrik graf palem $\dim(H) = m$.



DAFTAR PUSTAKA

- [1] Asmiati dan E.T. Baskoro, 2012. Characterizing All Graphs Containing Cycles With Locating-Chromatic Number 3. *The 5th International Conference on Research and Education in Mathematics AIP Conf. Prof.* **1450**:321-357.
- [2] Asmiati, E. T. Baskoro, H. Assiyatun, D. Suprijanto, R. Simanjuntak, dan S. Uttunggadewa. 2012. The Locating-Chromatic Number of Firecracker Graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences.* **63**(1):11-23.
- [3] Behtoei, A. dan Anbarloei, M. 2014. *The Locating Chromatic Number of The Join Graphs.* Bulletin of the Iranian Mathematical Society. **40**(6):1491-1504.
- [4] Bondy, J.A., U.S.R. Murty. 1976. *Graph Theory with Application.* Elsevier Science Publishing, New York.
- [5] Chartrand, G., M.A. Henning, P.J. Slater, dan P. Zhang. 2002. The Locating-Chromatic Number of a Graph. *Bull.Inst. Combin. Appl.* **36**:89-101.
- [6] Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J. dan Zhang, P. 2003. Graph of Order n With Locating-Chromatic Number $n-1$. *Discrete Math.* **269**:65-79.

- [7] Rahayu, R. D., Y. Kuswardi. 2018. Dekomposisi Graf Helm. *JMME*. **8**(1):31-45.
- [8] Sancoko, S.W. 2020. Pelabelan Antiajaib Jarak Beberapa Kelas Graf Terkait Graf Helm. *JRAM*. **4**(2): 93 - 102.
- [9] Welyyanti, D., E. T. Baskoro., R. Simanjuntak., S. Uttungadewa. 2014. The Locating-Chromatic Number of Disconnected Graph. *For East Journal of Mathematical Science*. **94**(2):169-182.
- [10] Welyyanti, D., E. T. Baskoro., R. Simanjuntak., S. Uttungadewa. 2015. On Locating-Chromatic Number for Graphs with Dominant Vertices. *Procedia Computer Science*. **74**:89-92.
- [11] Welyyanti, D. 2018. Beberapa Syarat Cukup untuk Bilangan Kromatik Lokasi Hingga pada Graf Tak Terhubung. *Eksakta*. **19**(1): 76 - 82.
- [12] Welyyanti, D., R. Lestari dan S.R. Putri. 2019. The locating-Chromatic Number of Disconnected Graph with Path and Cycle Graph as its Components. *IOP Conference Series*. **1317**:1 -7.

RIWAYAT HIDUP



Penulis bernama Mellany, lahir di Tanjung Pinang pada tanggal 27 Februari 2000 dan merupakan anak pertama dari dua bersaudara dari pasangan ayahanda Gusyanto dan ibunda Imah. Penulis menyelesaikan pendidikan Sekolah Dasar (SD) di SD Negeri 007 Sagulung pada tahun 2012, Sekolah Menengah Pertama (SMP) di SMP

Negeri 26 Batam pada tahun 2015, dan Sekolah Menengah Atas (SMA) di SMA Negeri 5 Batam pada tahun 2018. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Andalas melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN).

Selama menjadi mahasiswa di jurusan Matematika FMIPA Unand, penulis aktif dalam organisasi HIMATIKA (Himpunan Mahasiswa Matematika) FMIPA Unand. Penulis pernah diamanahkan menjadi Bendahara Umum pada kepengurusan periode 2020/2021. Penulis juga aktif dalam organisasi BEM (Badan Eksekutif Mahasiswa) KM FMIPA Unad pada tahun 2020-2021 dan UKMF (Unit Kegiatan Mahasiswa Fakultas) KKS (Kelompok Kegiatan Seni) FMIPA Unand pada tahun 2019.

Alhamdulillah atas usaha, motivasi serta izin Allah Yang Maha Kuasa, penulis dapat menyelesaikan studi S1 di Universitas Andalas dengan menyanggah gelar Sarjana Sains (S.Si) pada tanggal 01 Februari 2023.