

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang



Lax pair merupakan pasangan dua operator diferensial yang jika disubstitusikan ke suatu persamaan (dinamakan persamaan Lax) akan menghasilkan suatu persamaan diferensial parsial tertentu. Jika suatu persamaan diferensial parsial memiliki *Lax pair*, maka hal itu mengindikasikan bahwa persamaan diferensial tersebut bersifat *integrable* (dapat diselesaikan secara eksak). Awal mula ide tentang *Lax pair* ini dipublikasikan oleh Peter Lax pada tahun 1968 [9]. Sejak saat itu *Lax pair* menjadi objek penting dalam analisis suatu sistem *integrable*.

Suatu *Lax pair* terdiri dari operator L , yang bergantung terhadap x, u_x, u_{xx}, \dots , dan operator M yang bersama-sama dengan operator L merepresentasikan suatu persamaan diferensial parsial $F(x, t, u, u_x, u_t, \dots) = 0$ ketika disubstitusikan ke persamaan $L_t = [M, L]$ (disebut persamaan *Lax*). Di sini notasi $[M, L]$ didefinisikan sebagai $[M, L] = (ML - LM)$ dan disebut sebagai komutator (*commutator*) dari operator M dan L .

Proses menemukan M dan L yang bersesuaian dengan persamaan diferensial yang diberikan secara umum bersifat tak trivial. Oleh karena itu, jika ada petunjuk, maka membalikkan proses dengan terlebih dahulu menetap-

kan suatu L dan M dan kemudian menentukan persamaan diferensial parsial yang mana yang bersesuaian terkadang dapat memberikan hasil yang baik. Namun hal ini membutuhkan banyak percobaan (*trial*), dan tentu saja bisa tidak mengarah ke solusi yang dikehendaki. Karena eksistensi dari *Lax pair* mengindikasikan bahwa persamaan diferensial parsial yang bersesuaian bersifat *integrable*, maka menemukan *Lax pair* adalah suatu cara untuk menemukan persamaan diferensial parsial baru yang *integrable* [7].

Di samping itu, jika suatu *Lax pair* yang cocok dapat ditemukan untuk suatu persamaan diferensial parsial tertentu, maka hal itu memungkinkan *Lax pair* digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial tersebut dengan menggunakan suatu metode, seperti metode *inverse scattering transform* (IST) yang dikembangkan oleh Gardner, Greene, Kruskal, dan Miura [4].

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas berdasarkan latar belakang pada penelitian ini adalah menjelaskan tentang konsep *Lax pair* secara umum dan menganalisis beberapa sifat terkait yang muncul, kemudian menerapkannya secara khusus pada persamaan Liouville [11]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \exp(2u) = 0, \quad u = u(x, t).$$

Kajian tentang masalah ini mengeksplorasi kembali studi pada referensi [6] dan [7].

1.3 Batasan Masalah

Penerapan *Lax pair* pada persamaan Liouville dalam tugas akhir ini hanya dibatasi pada analisis beberapa sifat terkait yang muncul dan tidak digunakan dalam menyelesaikan persamaan Liouville tersebut.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan permasalahan yang akan dibahas, maka tujuan yang ingin dicapai pada penelitian ini adalah:

1. Menjelaskan analisis *Lax pair* secara umum.
2. Membuktikan beberapa sifat terkait yang muncul dari konsep *Lax pair*.
3. Menjelaskan penerapan *Lax Pair* secara khusus pada persamaan Liouville.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan tugas akhir ini terdiri dari lima bab. Bab I berisi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan dan sistematika penulisan. Bab II merupakan landasan teori yang menjelaskan teori-teori dasar yang berkaitan dengan *Lax pair*. Bab III membahas tentang analisis *Lax pair*. Bab IV menjelaskan penerapan *Lax pair* pada persamaan Liouville. Terakhir Bab V berisi kesimpulan dan saran.