BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Turunan numerik digunakan secara luas untuk menentukan laju perubahan suatu data digital yang mana fungsi pembangkitnya secara umum tidak diketahui. Selain itu, juga terdapat fungsi-fungsi tertentu yang tidak dapat diturunkan secara analitik sehingga dibutuhkan metode numerik untuk menentukan hampiran turunannya.

Salah satu metode numerik yang paling sering dan mudah digunakan dalam menghitung hampiran turunan suatu fungsi adalah metode beda hingga. Pada metode ini variabel domain suatu fungsi dipartisi atas sejumlah titik dan rumus aproksimasi untuk turunan diperoleh dari ekspansi deret Taylor di satu atau lebih titik partisi [6]. Berdasarkan lokasi titik-titik partisi yang digunakan, metode beda hingga dibagi atas tiga jenis, yaitu beda maju (*forward difference*), beda mundur (*backward difference*), dan beda pusat (*central difference*).

Rumus umum beda hingga untuk turunan ke-m dengan ketelitian orde ke-n dapat dibangkitkan dengan suatu algoritma rekursif, artinya untuk memperoleh rumus turunan ke-m dengan ketelitian orde ke-n, perlu diketahui dulu rumus turunan ke-$(m-1)$ dengan ketelitian orde ke-$(n-1)$. Salah satu algoritma rekursif tersebut dikembangkan oleh Fornberg [3] yang darinya dapat dibuat tabel yang berisi koefisien-koefisien rumus beda maju, mundur dan pusat untuk beberapa tingkatan turunan fungsi dengan beberapa orde ketelitian.

Dalam tataran praktis, algoritma rekursif tersebut membutuhkan memori komputasi yang semakin besar untuk tingkatan turunan dan orde ketelitian yang semakin tinggi, karena melibatkan jumlah data (*titik-titik partisi*) yang semakin banyak. Untuk mengatasi hal tersebut, diperlukan bentuk tutup dari rumus beda hingga sehingga koefisien-koefisiennya dapat ditentukan secara langsung tanpa melewati proses perhitungan secara rekursif.

Adapun yang dimaksud dengan bentuk tutup di sini adalah suatu ekspresi matematika yang dapat dihitung dalam sejumlah berhingga operasi. Sebagai contoh, ekspresi matematika

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x}{2^i} \tag{1.1}$$

bukanlah dalam bentuk tutup karena penjumlahnya memerlukan tak-hingga banyak operasi. Namun, dengan menggunakan deret geometri, ekspresi di atas dapat dinyatakan dalam bentuk tutup

$$f(x) = 2x, \tag{1.2}$$

yang menjadi lebih sederhana perhitungannya.

Dalam referensi [5], Khan dkk memberikan bentuk tutup dari rumus beda hingga yang dikembangkan berdasarkan deret Taylor. Untuk hampiran turunan pertama suatu fungsi $f(x)$ di titik $x = x_0$, bentuk tutup dari rumus beda hingganya diberikan oleh

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{T} \sum_k g_k f_k, \tag{1.3}$$

dimana T menyatakan lebar selang partisi, sedangkan koefisien g_k dan iterator k didefinisikan berdasarkan orde dan jenis beda hingga.

Rumus untuk koefisien g_k diperoleh dengan mengobservasi solusi sistem persamaan yang dibangun dari deret Taylor. Meskipun validasi rumus tersebut telah dibuktikan secara numerik sampai ke orde N yang cukup besar, namun rumus tersebut tidak dilengkapi dengan bukti matematis yang komprehensif.

1.2 Perumusan Masalah

Pada skripsi ini akan dibahas pembuktian matematis dari bentuk tutup rumus beda hingga berdasarkan deret Taylor yang dikembangkan oleh Khan dkk dalam referensi [5]. Pembahasan pada skripsi ini mengeksplorasi kembali kajian pada referensi [4].

1.3 Pembatasan Masalah

Pembahasan dalam skripsi ini dibatasi pada pembuktian bentuk tutup rumus beda maju untuk turunan pertama dari fungsi satu variabel.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk memberikan penjelasan detail mengenai pembuktian matematis dari bentuk tutup rumus beda maju berdasarkan deret Taylor.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan pada skripsi ini terdiri atas empat bab. Bab I memuat latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan. Bab II membahas beberapa konsep dan dasar-dasar teori yang berkaitan dengan permasalahan yang akan dikaji. Selanjutnya pada Bab III dijelaskan pembuktian bentuk tutup dari rumus beda maju berdasarkan deret Taylor. Terakhir pada Bab IV disajikan kesimpulan dan saran.