BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matriks adalah susunan elemen-elemen skalar dalam bentuk baris dan kolom. Misalkan matriks A berukuran m baris dan n kolom, dapat dinyatakan sebagai matriks A yang berukuran $m \times n$. Entri-entri matriks A dinamakan sesuai dengan letaknya berdasarkan baris dan kolom, disimbolkan a_{ij}, yaitu simbol untuk entri pada baris ke-i dan kolom ke-j dengan i dan j adalah bilangan asli [5]. Terdapat beberapa matriks khusus, di antaranya matriks *transpose*, matriks bujursangkar atau persegi, matriks diagonal, matriks identitas, dan matriks partisi atau blok. Matriks *transpose* dari A, disimbolkan A^T adalah matriks yang diperoleh dengan cara menukar elemen-elemen baris pada matriks A menjadi elemen-elemen kolom atau sebaliknya. Matriks bujursangkar atau persegi adalah matriks yang banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom, dengan kata lain $m = n$ [11]. Matriks diagonal adalah matriks bujursangkar dengan $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$. Matriks identitas dilambangkan dengan I adalah matriks diagonal dengan semua elemen diagonalnya 1 atau $a_{ij} = 1$ untuk $i = j$ dan $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$. Sebuah matriks dapat diblok atau dipartisi menjadi matriks-matriks yang ukurannya lebih kecil dengan menggambar garis vertikal atau garis horizontal antara baris atau kolomnya, yang disebut sebagai matriks blok atau matriks partisi. Matriks-matriks hasil partisi dari matriks A yang ukurannya kecil dikatakan sebagai submatriks atau blok [5].

Operator *vec* merupakan operasi pada matriks dengan aturan tertentu yang mengubah suatu matriks menjadi vektor kolom [6]. Dengan kata lain, operator *vec* merupakan operasi yang mengubah matriks menjadi vektor dengan menyusun kolom matriks secara vertikal [9]. Misalkan matriks A berukuran $m \times n$ dan *transpose* matriks A^T berukuran $n \times m$, maka diperoleh kedua vektor yaitu $vec(A)$ dan $vec(A^T)$ berukuran $mn \times 1$. Perhatikan bahwa, $vec(A)$ dan $vec(A^T)$ memiliki entri-entri yang sama akan tetapi susunan elemennya berbeda. Oleh karena itu, terdapat matriks permutasi yang mengubah $vec(A)$ menjadi $vec(A^T)$ yang disebut sebagai matriks komutasi [8].

Matriks komutasi merupakan salah satu dari matriks permutasi $m \times n$ yang merupakan suatu transformasi matriks *vec* ke *transpose* matriks *vec*. Dengan kata lain matriks komutasi berukuran $mn \times mn$ merupakan matriks blok $m \times n$ dengan setiap blok berukuran $n \times m$ yang memiliki entri tunggal yaitu 1 pada posisi ke-(j, i) dan 0 untuk entri lainnya[12].

Pembahasan mengenai matriks komutasi dapat dilihat dalam beberapa literatur seperti [12], [8] dan [7]. Pada [12] dibahas matriks komutasi yang digunakan untuk mengubah matriks ke dalam *transpose* matriks yang berkaitan dengan *Kronecker Product* atau hasil kali *Kronecker*. Dalam artikel [8] dibahas beberapa sifat-sifat matriks komutasi dan diaplikasikan pada beberapa masalah yang berhubungan dengan distribusi normal. Dalam artikel [7] dikaji sifat yang berkaitan dengan matriks komutasi, operator *vec* dan hasil kali *Kro-*

necker serta hubungan antara hasil kali *Kronecker* dengan matriks komutasi dan operator *vec*. Selanjutnya, matriks komutasi disebutkan oleh Xu, dkk [12] sebagai matriks yang tunggal untuk sebarang matriks berukuran $m \times n$. Namun kemudian oleh Yanita, dkk [13] dituliskan bahwa untuk matriks-matriks yang berada pada grup *Kronecker quaternion* terdapat matriks komutasi yang tidak tunggal. Grup *Kronecker quaternion* mempunyai unsur 32 matriks berukuran 4×4, yang terdiri dari matriks simetri dan *skew* simetri. Selanjutnya ditemukan bahwa untuk unsur grup dari matriks simetri terdapat empat matriks komutasi.

Berdasarkan kajian [13], peneliti kemudian menduga bahwa untuk matriks selain matriks yang berada pada grup *Kronecker quaternion*, terdapat juga matriks komutasi yang tidak tunggal. Oleh karena itu peneliti mencoba menyelidiki matriks komutasi dari suatu matriks dengan ukuran 4×4 yang berbeda dengan yang dikaji pada [13]. Peneliti memilih matriks segitiga atas karena matriks segitiga atas memiliki struktur yang unik, yaitu semua entri-entri di bawah diagonal utama adalah nol atau $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$. Oleh karena itu terdapat 10 entri (selain 6 entri yang berada dibawah diagonal utama) yang dapat disusun dengan susunan minimal dua entri yang sama pada posisi yang berbeda, yang diklasifikasikan berdasarkan susunan lajur kolom, yaitu kolom kedua, kolom ketiga, kolom keempat dan susunan lajur baris, yaitu baris pertama, baris kedua, baris ketiga. Peneliti membuat hipotesis bahwa dari susunan entri-entri yang dipilih tersebut, akan diperoleh lebih dari satu matriks komutasi untuk suatu matriks segitiga atas.

1.2 Perumusan Masalah

Pada penelitian ini akan dikaji:

1. Bagaimana menentukan dan mengklasifikasikan matriks komutasi dari matriks segitiga atas berukuran 4×4 dengan susunan minimal dua entri yang sama pada setiap lajur kolom?
2. Bagaimana menentukan dan mengklasifikasikan matriks komutasi dari matriks segitiga atas berukuran 4×4 dengan susunan minimal dua entri yang sama pada setiap lajur baris?

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk:

1. Menentukan dan mengklasifikasikan matriks komutasi dari matriks segitiga atas berukuran 4×4 dengan susunan minimal dua entri yang sama pada setiap lajur kolom.
2. Menentukan dan mengklasifikasikan matriks komutasi dari matriks segitiga atas berukuran 4×4 dengan susunan minimal dua entri yang sama pada setiap lajur baris.

1.4 Sistematika Penulisan

Bagian ini menjelaskan tentang sistematika penulisan tesis. Tesis ini terdiri dari Bab I Pendahuluan, yang menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah serta tujuan penelitian. Latar belakang berisi tentang deskripsi topik matriks dan jenis-jenis matriks serta alasan peneliti memilih matriks segitiga atas sebagai objek dalam penelitian ini. Kemudian Bab II Tinjauan Pustaka menjelaskan tentang matriks segitiga atas, definisi operator *vec*, definisi hasil kali *Kronecker*, definisi matriks permutasi, definisi matriks komutasi, dan teorema hubungan antara operator *vec* dan hasil kali *Kronecker* serta sifat-sifat hasil kali *Kronecker*. Bab III Hasil dan Pembahasan menguraikan tentang hasil yang diperoleh berupa penentuan dan pengklasifikasian matriks-matriks komutasi dari matriks segitiga atas berukuran 4×4 dengan susunan minimal dua entri yang sama pada lajur baris dan lajur kolom. Selanjutnya, Bab IV Kesimpulan memaparkan ringkasan dari hasil penelitian.