KESTABILAN MODEL *SUSCEPTIBLE INFECTED TREATMENT RECOVERED* (SITR) DENGAN VAKSINASI PADA PENYEBARAN COVID-19

TESIS MAGISTER

OLEH:

RATNA HAYANI TSANI

NO. BP. 2020432014

DOSEN PEMBIMBING:

1. Prof. Dr. MUHAFZAN

2. Dr. ARRIVAL RINCE PUTRI

PROGRAM STUDI S2 MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA DAN SAINS DATA
FMIPA - UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG

2022

KESTABILAN MODEL *SUSCEPTIBLE INFECTED TREATMENT RECOVERED* (SITR) DENGAN VAKSINASI PADA PENYEBARAN COVID-19

OLEH:

RATNA HAYANI TSANI

NO. BP. 2020432014

TESIS

Sebagai salah satu syarat melaksanakan penelitian di Program Studi S2 Matematika, Departemen Matematika dan Sains Data, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas

PROGRAM STUDI S2 MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA DAN SAINS DATA
FMIPA - UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2022

TANDA PERSETUJUAN TESIS

Dengan ini dinyatakan bahwa

Nama	:	Ratna Hayani Tsani
No. Buku Pokok	:	2020432014
Jurusan	:	Matematika
Bidang	:	Matematika Terapan
Judul Tesis	:	**Kestabilan Model Susceptible Infected Treatment Recovered (SITR) dengan Vaksinasi pada Penyebaran COVID-19**

telah diuji dan disetujui tesisnya sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains (M.Si) melalui ujian magister yang diadakan pada tanggal **19 Desember 2022** berdasarkan ketentuan yang berlaku.

Menyetujui,

1. Komisi Pembimbing

Pembimbing I,

Prof. Dr. Muhafzan
NIP. 196706021993021001

Pembimbing II,

Dr. Arrival Rince Putri
NIP. 197804262005012003

2. Ketua Departemen,

Dr. Yanita
NIP. 197210302003122001

3. Ketua Program Studi,

Dr. Ferra Yanuar
NIP. 197505301999032002

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Dengan ini saya menyatakan bahwa tesis saya yang berjudul **Kestabilan Model Susceptible Infected Treatment Recovered (SITR) dengan Vaksinasi pada Penyebaran COVID-19** adalah hasil kerja dan karya saya sendiri dan bukan merupakan jiplakan dari hasil kerja atau karya orang lain, kecuali kutipan yang sumbernya dicantumkan. Jika di kemudian hari pernyataan ini tidak benar maka status kelulusan dan gelar yang saya peroleh menjadi batal dengan sendirinya.

ABSTRAK

KESTABILAN MODEL *SUSCEPTIBLE INFECTED TREATMENT RECOVERED* (SITR) PADA PENYEBARAN COVID-19 DENGAN VAKSINASI

Oleh: Ratna Hayani Tsani

(Prof. Dr. Muhafzan dan Dr. Arrival Rince Putri)

Dalam artikel ini dikaji kestabilan model dinamika *Susceptible Infected Treatment Recovered (SITR)* pada penyebaran COVID-19 dengan pemberian vaksinasi pada subpopulasi *Susceptible*. Pada model $SITR$ subpopulasi *Susceptible* dibagi menjadi dua bagian, yaitu subpopulasi individu rentan yang belum berusia lanjut dan tidak komorbid, yang disimbolkan dengan S_1 dan individu rentan yang berusia lanjut atau komorbid, yang disimbolkan dengan S_2. Model yang dikontruksi merupakan suatu sistem nonlinier dengan penambahan kompartemen vaksin. Model ini memiliki dua titik tetap, yaitu titik tetap bebas penyakit dan titik tetap endemik. Selanjutnya, dilakukan analisis kestabilan pada kedua titik tetap tersebut yang menunjukkan bahwa titik tetap bebas penyakit stabil asimtotik jika $I > 0$ dan titik tetap endemik stabil asimtotik jika $I = 0$. Untuk melihat implementasi dari model diperlukan simulasi numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta orde 4 dan bantuan *software* Matlab.

Kata Kunci: *Kestabilan Model SITR, Vaksinasi, Metode Runge Kutta*

KATA PENGANTAR

Alhamdullillahirabbill'alamin, segala puji atas kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, hidayah, dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan tesis ini yang berjudul "Kestabilan Model Susceptible Infected Treatment Recovered dengan Vaksinasi pada Penyebaran COVID-19". Shalawat dan Salam semoga selalu tercurahkan kepada Baginda Rasulullah SAW yang telah memberikan ilmu dan iman dalam cahaya Islam.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tesis ini tidak terlepas dari dukungan, dorongan, kerjasama maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah membantu penulisan tesis ini, terutama kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Muhafzan dan Ibu Dr. Arrival Rince Putri selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan ilmu, motivasi, dan nasehat dalam menyelesaikan tesis ini.

2. Bapak Prof. Dr. Syafrizal Sy, Bapak Dr. Admi Nazra, dan Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan selaku tim penguji yang telah memberikan kritikan dan saran untuk perbaikan dalam penulisan tesis ini.

3. Ibuk Dr. Ferra Yanuar, selaku ketua Program Studi S2 Matematika FMIPA Universitas Andalas Padang.

4. Bapak dan Ibu dosen Departemen Matematika dan Sains Data dan Program Studi S2 Matematika FMIPA Universitas Andalas yang tidak dapat

penulis sebutkan satu persatu, terima kasih atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis.

5. Ayahanda Tasril, S.Pd.I, Ibunda Nur Elina, kakanda Rara Mukhlishatul Melta, dan adinda Husnul Fauza yang tanpa lelah memberikan doa serta dukungan atas segalanya.

6. Teman-teman seperjuang mahasiswa angkatan 2020 Genap yang telah bejuang bersama dan saling *support* satu sama lain selama masa studi S2.

7. Semua pihak yang telah membantu selama penulisan tesis ini.

Penulis sangat menyadari bahwa dalam tesis ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis mengharapkan kritik dan saran agar kelak diperoleh hasil yang lebih baik. Penulis berharap agar tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang memerlukan.

Padang, 22 Desember 2022

Ratna Hayani Tsani

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Coronavirus Disease 2019 (COVID-19) adalah penyakit menular yang disebabkan oleh *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2* (SARS-CoV-2) [17]. SARS-CoV-2 merupakan *coronavirus* jenis baru yang belum pernah diidentifikasi sebelumnya pada manusia. Ada setidaknya dua jenis *coronavirus* yang dapat menimbulkan gejala berat yaitu *Middle East Respiratory Syndrome* (MERS) dan *Severe Acute Respiratory Syndrome* (SARS). Tanda dan gejala umum infeksi COVID-19 antara lain gejala gangguan pernapasan akut seperti demam, batuk, dan sesak napas. Pada kasus COVID-19 yang kronis dapat menyebabkan pneumonia, sindrom pernapasan akut, gagal ginjal, bahkan kematian [17]. Penyakit ini dapat menjadi lebih berbahaya jika diderita oleh kelompok lanjut usia dan mereka yang memiliki penyakit bawaan (komorbid). Beberapa penyakit bawaan yang dapat meningkatkan faktor resiko COVID-19 antara lain hipertensi, diabetes, jantung, asma, dan kanker [7].

Sejak kasus pandemi COVID-19 diumumkan WHO, seluruh negara yang terjangkit berupaya untuk membuat strategi pencegahan wabah COVID-19 dengan tujuan untuk memperlambat dan menghentikan penularan virus [17]. Berbagai upaya telah dilakukan pemerintah diantaranya yaitu *lockdown*, karantina, 3M (memakai masker, menjaga jarak menghindari kerumunan, dan mencuci tangan pakai sabun), 3T (tes, telusur, tindak lanjut). Sampai saat ini belum ditemukan obat untuk mengatasi COVID-19, sehingga vaksin menjadi salah satu upaya baru yang dicanangkan untuk meningkatkan kekabalan tubuh individu. Kemunculan vaksin telah memberi banyak harapan untuk segera terbebas dari pandemi ini. Vaksinasi bertujuan untuk mengaktifkan antibodi sehingga diharapkan akan kebal terhadap penyakit tersebut atau hanya mengalami sakit ringan [7]. Kondisi ini juga memicu para ilmuan untuk menganalisis kasus pandemi COVID-19.

Salah satu cara untuk menjelaskan permasalahan COVID-19 ini adalah dengan pemodelan matematika. Pemodelan matematika COVID-19 mulai dikembangkan sejak pandemi terjadi di awal tahun 2020. Model dasar penyebaran penyakit adalah model SIR (*Susceptible*, *Infected*, *Recovered*) dimana populasi dibagi menjadi tiga subpopulasi, pertama adalah subpopulasi *Susceptible* yang merupakan individu yang rentan terinfeksi penyakit, kedua adalah subpopulasi *Infected* yaitu individu yang telah terinfeksi penyakit, dan terakhir subpopulasi *Recovered* merupakan individu yang telah sembuh dari penyakit. Model SIR ini digunakan oleh Din dan Ebrahem (2021) untuk kasus penyebaran COVID-19 di Pakistan [5]. Mitra (2020) juga melaporkan model ini untuk kasus penyebaran COVID-19 di India [10]. Mohsen dkk (2020) membahas tentang kestabilan untuk model $SEIQR$ (*Susceptible, Exposed, Infected, hospital quarantined*, dan *Recovery*) dengan faktor karantina [11]. Sânchez dkk (2020) juga mengenalkan model matematika penyebaran COVID-19, yaitu model $SITR$ (*Susceptible*, *In-*

fected, *Treatment*, dan *Recovered*) dengan mengasumsikan suatu kondisi ketika individu yang terinfeksi penyakit harus melakukan pengobatan untuk sembuh [16]. Dalam penelitian [16] subpopulasi *Susceptible* (rentan) dibagi menjadi dua subpopulasi yaitu subpopulasi individu rentan yang belum berusia lanjut dan tidak punya penyakit bawaan serius (komorbid) dan subpopulasi kedua adalah subpopulasi rentan dari individu yang berusia lanjut atau individu yang punya penyakit bawaan serius (komorbid). Rafiq dkk (2022) kembali melanjutkan kembali penelitian [16] dengan melakukan analisis kestabilan titik tetap dan melihat simulasi numerik dari model $SITR$ penyebaran COVID-19 [14].

Seiring berjalannya waktu beberapa peneliti mulai mengembangkan model matematika pada COVID-19 tersebut dengan mempertimbangkan vaksinasi. Model $SVEIAHR$ (*Susceptible*, *Vaccinated*, *Exposed*, *Symptomatic infected individuals* , *Infected asymptomatic*, *Hospitalized*, dan *Recovered*) merupakan salah satu contoh model yang mempertimbangkan vaksinasi [4]. Resmawan dkk (2022) juga membahas suatu model matematika COVID-19 dengan menambahkan vaksinasi pada model $SEIR$ [15].

Dalam penelitian ini, peneliti memodifikasi model [14] dengan menambahkan vaksinasi, sehingga terdapat subpopulasi vaksin yang berasal dari subpopulasi *Susceptible* yang sudah divaksinasi. Selanjutnya dilakukan analisis kestabilan terhadap model yang diperoleh untuk melihat kestabilan titik tetap. Pada bagian akhir dilakukan simulasi numerik dengan bantuan *software* MATLAB.

1.2 Perumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dalam penelitian ini yang akan diteliti adalah:

1. Bagaimana bentuk model *Susceptible*, *Infected*, *Treatment*, dan *Recovered* ($SITR$) pada penyebaran COVID-19 dengan vaksinasi ?
2. Bagaimana kestabilan titik tetap dari model *Susceptible*, *Infected*, *Treatment*, dan *Recovered* ($SITR$) dengan vaksinasi?
3. Bagaimana pengaruh pemberian vaksin terhadap subpopulasi *Susceptible*, subpopulasi *Infected*, subpopulasi *Treatment*, dan subpopulasi *Recovered*?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah :

1. Menjelaskan model *Susceptible*, *Infected*, *Treatment*, dan *Recovered* ($SITR$) pada penyebaran COVID-19 dengan vaksinasi.
2. Menganalisis kestabilan titik tetap model *Susceptible*, *Infected*, *Treatment*, dan *Recovered* ($SITR$) pada penyebaran COVID-19 dengan vaksinasi.
3. Mengetahui pengaruh pemberian vaksin terhadap subpopulasi *Susceptible*, subpopulasi *Infected*, subpopulasi *Treatment*, dan subpopulasi *Recovered*.

1.4 Sistematika Penulisan

Bagian ini menjelaskan tentang sistematika penulisan tesis. Tesis ini terdiri dari Bab I Pendahuluan, yang menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah serta tujuan penelitian. Kemudian Bab II Tinjauan Pustaka menjelaskan tentang beberapa definisi, teorema serta notasi yang digunakan dalam penelitian. Bab III Hasil dan Pembahasan menjelaskan tentang kestabilan titik tetap dari model *Susceptible*, *Infected*, *Treatment*, dan *Recovered* ($SITR$) dengan vaksinasi. BAB IV Penutup, berisi tentang kesimpulan dari hasil dan pembahasan dan terakhir terdapat saran sebagai pedoman untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan disajikan teori-teori yang berkaitan dengan topik penelitian ini, yaitu teori dasar matriks, sistem persamaan diferensial orde satu dan kestabilannya, kriteria Routh-Hurwitz, metode Runge Kutta orde 4, dan model dinamik $SITR$ penyebaran COVID-19.

2.1 Teori Dasar Matriks

Matriks adalah susunan bilangan atau simbol yang disusun dalam baris dan kolom sehingga membentuk suatu bangun persegi atau persegi panjang. Bilangan atau simbol dalam matriks ini disebut entri matriks. Entri matriks yang muncul di baris i dan kolom j dari matriks A dilambangkan dengan a_{ij}. Jika matriks A memiliki m baris dan n kolom, maka maktiks A disebut sebagai matriks berukuran $m \times n$ yang dinyatakan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.1.1. *[1] Diberikan matriks $A_{n\times n}$. Suatu vektor tak nol $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dikatakan vektor eigen dari matriks A jika nilai eigen dari matriks A memenuhi*

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{2.1.1}$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ dalam hal ini disebut sebagai nilai eigen bagi matriks A yang terkait dengan vektor eigen $\mathbf{x}$.

Untuk mendapatkan nilai eigen, tulis persamaan (2.1.1) sebagai

$$(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{2.1.2}$$

dengan I_n adalah matriks identitas $n \times n$. Persamaan (2.1.2) memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika

$$det(\lambda I_n - A) = 0 \tag{2.1.3}$$

Persamaan (2.1.3) disebut persamaan karakteristik bagi matriks A.

2.2 Sistem Persamaan Diferensial Orde 1 dan Kestabilannya

Sistem persamaan diferensial orde 1 adalah kumpulan dari beberapa persamaan diferensial orde satu. Secara umum, sistem persamaan diferensial dapat ditulis sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{2.2.1}$$

dengan $\dot{\mathbf{x}} = \dfrac{d\mathbf{x}}{dt}$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\quad t \in \mathbb{R}$, dan $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$. Jika fungsi $\mathbf{f}$ linier maka persamaan (2.2.1) disebut sistem persamaan diferensial linier, sedangkan jika $\mathbf{f}$ nonlinier maka persamaan (2.2.1) disebut sistem persamaan diferensial nonlinier. Sistem

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 - 4x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= 2x_1 + 5x_2, \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

merupakan suatu contoh sistem persamaan diferensial linier, sedangkan

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1x_2 - 3x_2,\\ \frac{dx_2}{dt} &= 2x_1^2 + x_1x_2,\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

merupakan suatu contoh sistem persamaan diferensial nonlinier.

Salah satu kajian untuk sistem persamaan diferensial adalah kestabilan titik tetap. Dalam [8] disebutkan bahwa suatu titik $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$ dikatakan titik tetap dari sistem (2.2.1) jika $\mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0}$.

Definisi 2.2.2. *[8] Perhatikan sistem persamaan (2.2.1)*

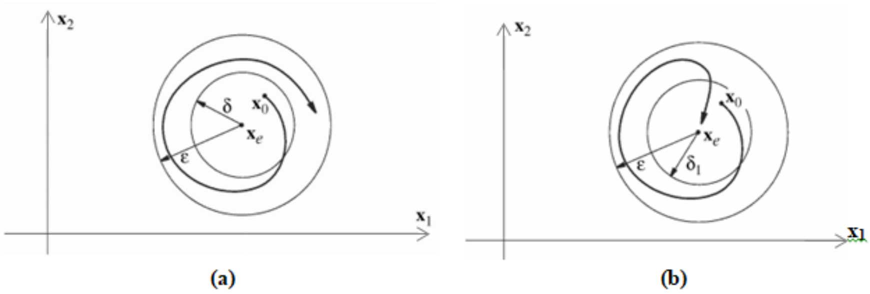
1. *Suatu titik tetap $\mathbf{x}_e$ untuk (2.2.1) dikatakan stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $t_0 \geq 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga*

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_e\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| < \varepsilon \quad \textit{untuk semua} \quad t \geq t_0.$$

2. *Suatu titik tetap $\mathbf{x}_e$ untuk (2.2.1) dikatakan stabil asimtotik jika $\mathbf{x}_e$ stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga*

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_e\| < \delta_1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| = 0.$$

Secara sederhana dapat dikatakan bahwa suatu titik tetap dikatakan stabil jika kurva solusi (*trajektory*/lintasan) yang pada awalnya dekat dengan titik tetap tersebut, maka dengan berlalunya waktu posisi *trajektory* tersebut tetap dekat dengan titik tetap itu. Suatu titik tetap dikatakan stabil asimtotik jika ia stabil dan dengan berlalunya waktu, trajektori tersebut semakin dekat (bergerak menuju) titik tetap. Gambar 2.2.1 mengilustrasikan trajektori dalam situasi stabil dan stabil asimtotik.



Gambar 2.2.1: (a) Stabil, (b) Stabil Asimtotik

Sebagai contoh, tunjukkan bahwa titik tetap (0,0) untuk sistem

$$\dot{x}_1 = -x_1, \; \dot{x}_2 = -x_2 \tag{2.2.4}$$

adalah stabil. Untuk itu, misalkan $\varepsilon > 0$ sebarang, akan dicari $\delta > 0$ dan $t_0 \geq 0$ sedemikian sehingga

$$||(x_1(t_0), x_2(t_0)) - (0,0)|| < \delta \;\Rightarrow ||(x_1(t), x_2(t)) - (0,0)|| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Untuk $t = t_0 \geq 0$, solusi sistem (2.2.4) adalah

$$(x_1(t), x_2(t)) = \left(x_1(t_0)e^{-t}, x_2(t_0)e^{-t}\right) = (x_1(t_0), x_2(t_0))\, e^{-t}.$$

Karena

$$\left|\left|(x_1(t_0), x_2(t_0))\, e^{-t}\right|\right| = ||(x_1(t_0), x_2(t_0))||\, e^{-t} \leq ||(x_1(t_0), x_2(t_0))||\,,$$

pilih $\delta = \varepsilon$, akibatnya berlaku

$$||(x_1(t_0), x_2(t_0))|| < \delta \;\Rightarrow ||(x_1(t_0), x_2(t_0))||\, e^{-t} \leq ||(x_1(t_0), x_2(t_0))|| < \epsilon, \;\; \forall t \geq 0.$$

Dalam [8] disebutkan bahwa jika $\mathbf{f}$ dalam (2.2.1) adalah nonlinier maka kestabilan titik tetapnya dapat diperiksa dengan melinierkan sistem tersebut di sekitar titik tetap $\mathbf{x}_e$ dengan menggunakan ekspansi deret Taylor [8]. Untuk kesederhanaan, perhatikan fungsi $\mathbf{f}(x_1, x_2)$ di $\mathbb{R}^2$, yaitu $\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$.

Misalkan $\mathbf{f}$ adalah fungsi yang kontinu dan memiliki turunan parsial di titik tetap $\mathbf{x}_e$, maka deret Taylor untuk $\mathbf{f}$ di sekitar titik tetap $\mathbf{x}_e = (c_1, c_2)$ sebagaimana dijabarkan dalam [8] adalah

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(x_1, x_2) = \mathbf{f}(c_1, c_2) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}(c_1, c_2)(x_1 - c_1) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2}(c_1, c_2)(x_2 - c_2) + \\ \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_1^2}(c_1, c_2)\frac{(x_1 - c_1)^2}{2!} + \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_2^2}(c_1, c_2)\frac{(x_2 - c_2)^2}{2!} + \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_1 \partial x_2}(c_1, c_2) \\ (x_1 - c_1)(x_2 - c_2) + \ldots .\end{aligned}$$

Misalkan

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \tag{2.2.5}$$

maka

$$\begin{aligned}f_i(x_1, x_2) = f_i(c_1, c_2) + (x_1 - c_1)\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(c_1, c_2) + (x_2 - c_2)\frac{\partial f_i}{\partial x_2}(c_1, c_2) \\ + \textit{suku orde tinggi},\end{aligned}$$

untuk $i = 1, 2$, karena $\mathbf{x}_e = (c_1, c_2)$ adalah titik tetap dari sistem (2.2.5) maka $f_i(c_1,\ c_2) = 0,\ i = 1, 2.$

Misalkan $y_i = x_i - c_i$, $i = 1, 2$, maka (2.2.5) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 = y_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c_1, c_2) + y_2\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(c_1, c_2) + \textit{suku orde tinggi}, \\ \dot{y}_2 = y_1\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(c_1, c_2) + y_2\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(c_1, c_2) + \textit{suku orde tinggi}.\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Dalam notasi matriks, (2.2.6) dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c_1, c_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(c_1, c_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(c_1, c_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(c_1, c_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \textit{ suku orde tinggi}$$

atau secara ringkas, ditulis

$$\dot{\mathbf{y}} = J_{\mathbf{x}_e}\mathbf{y} + \textit{suku orde tinggi}, \tag{2.2.7}$$

dengan $\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2]^T$ dan

$$J_{\mathbf{x}_e} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_e)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_e)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_e)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_e)}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \tag{2.2.8}$$

Matriks $J_{\mathbf{x}_e}$ disebut sebagai matriks Jacobian dari $\mathbf{f}$ pada titik tetap $\mathbf{x}_e = (c_1, c_2)$, dengan mengabaikan suku orde tinggi, maka sistem

$$\dot{\mathbf{y}} = J_{\mathbf{x}_e}\mathbf{y} \tag{2.2.9}$$

disebut sebagai pelinieran dari sistem nonlinier (2.2.5) di sekitar titik tetap $\mathbf{x}_e = (c_1, c_2)$ [8]. Secara umum di $\mathbb{R}^n$ berlaku

$$J_{\mathbf{x}_e} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_e)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_e)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_e)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_e)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_e)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_e)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}_e)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}_e)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}_e)}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \tag{2.2.10}$$

dengan $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$.

Definisi dan teorema berikut berperan dalam mendeteksi kestabilan suatu titik tetap dari suatu sistem nonlinier (2.2.5).

Definisi 2.2.3. *[8] Misalkan $\mathbf{x}_e$ adalah titik tetap dari sistem persamaan (2.2.5) dan $J_{\mathbf{x}_e}$ adalah matriks Jacobian dari $\mathbf{f}$ disekitar titik tetap $\mathbf{x}_e$. Titik tetap $\mathbf{x}_e$ dikatakan titik tetap hiperbolik jika bagian rill dari semua nilai eigen dari matriks $J_{\mathbf{x}_e}$ adalah tidak nol.*

Sebagai contoh, perhatikan sistem persamaan nonlinier berikut:

$$\dot{x} = -3x + x^2 - xy, \quad \dot{y} = -5y + xy, \tag{2.2.11}$$

dengan titik tetap adalah (0,0). Pelinieran dari sistem (2.2.11) memberikan $J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ yang mempunyai nilai eigen riil negatif yaitu -3 dan -5. Sehingga, titik tetap (0,0) adalah titik tetap hiperbolik.

Teorema 2.2.1. *[13] Titik tetap hiperbolik $\mathbf{x}_e$ dari sistem persamaan (2.2.5) adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika bagian riil dari semua nilai eigen matriks Jacobian $J_{\mathbf{x}_e}$ adalah negatif.*

2.3 Kriteria Routh-Hurtwitz

Perhitungan nilai eigen dari suatu polinomial dapat ditentukan dengan menggunakan Kriteria Routh-Hurwitz. Kriteria ini memberikan informasi untuk mengetahui apakah akar dari suatu polinomial negatif atau tidak [6].

Teorema 2.3.2. [6] *Misalkan $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ adalah bilangan riil dengan $a_j \neq 0$ untuk $j > n$. Bagian riil dari semua akar dari polinomial*

$$P(\tau) = \tau^n + a_1\tau^{n-1} + \cdots + a_{n-2}\tau^2 + a_{n-1}\tau + a_n \tag{2.3.1}$$

adalah negatif jika dan hanya jika determinan dari matriks

$$H_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k \end{bmatrix},$$

bernilai positif untuk setiap $k = 1, 2, \cdots, n$.

Dari Teorema 2.3.2 untuk $n = 4$ diperoleh bahwa bagian riil semua akar persamaan

$$P(\tau) = \tau^4 + a_1\tau^3 + a_2\tau^2 + a_3\tau + a_4 \tag{2.3.2}$$

adalah negatif jika

$$a_1 > 0, \tag{2.3.3}$$

$$a_1a_2 - a_3 > 0, \tag{2.3.4}$$

$$a_3a_4 > 0. \tag{2.3.5}$$

Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut:

Matriks $H_k,\ k = 1, 2, 3, 4$ dari polinomial (2.3.2), yaitu

$$H_1 = \begin{bmatrix} a_1 \end{bmatrix},\ H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix},\ H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix},\ H_4 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{bmatrix}.$$

Agar semua akar polinomial (2.3.2) memiliki nilai riil negatif maka

$$|H_1| = a_1 > 0, \tag{2.3.6}$$

$$|H_2| = a_1a_2 - a_3 > 0, \tag{2.3.7}$$

$$|H_3| = a_3(a_1a_2 - a_3) - a_1^2a_4 > 0, \tag{2.3.8}$$

$$\begin{aligned} |H_4| &= a_3a_4(a_1a_2 - a_3) - a_1^2a_4^2 > 0, \\ &= a_3a_4 > 0. \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Dengan demikian, berdasarkan (2.3.6), (2.3.7), dan (2.3.9) maka syarat (2.3.3), (2.3.4), dan (2.3.5) terpenuhi.

Sebagai contoh, perhatikan polinomial berikut:

$$z^4 + z^3 + 2z^2 + z + \frac{1}{2}. \tag{2.3.10}$$

Berdasarkan Teorema 2.3.2 diperoleh determinan matriks $H_{1,2,3,4}$ dari polinomial (2.3.10), yaitu

$$|H_1| = 1, \ |H_2| = 1, \ |H_3| = \frac{1}{2}, \ |H_4| = \frac{1}{4}. \tag{2.3.11}$$

Dari (2.3.11) dapat dilihat bahwa determinan matriks $H_{1,2,3,4}$ bernilai positif. Dengan demikian, bagian riil semua akar polinomial (2.3.10) adalah negatif.

2.4 Metode Runge Kutta Orde-4

Metode Runge-Kutta adalah alternatif lain dari metode deret Taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode Runge-Kutta orde-4 sering digunakan karena memiliki derajat ketelitian yang lebih tinggi [9]. Diberikan persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\dot{z} = f(t, z), \qquad z(t_0) = z_0.$$

dalam hal ini z bisa berbentuk skalar ataupun vektor. Misalkan h adalah ukuran langkah dengan $h > 0$. Bentuk umum Metode Runge Kutta Orde-4 adalah sebagai berikut:

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

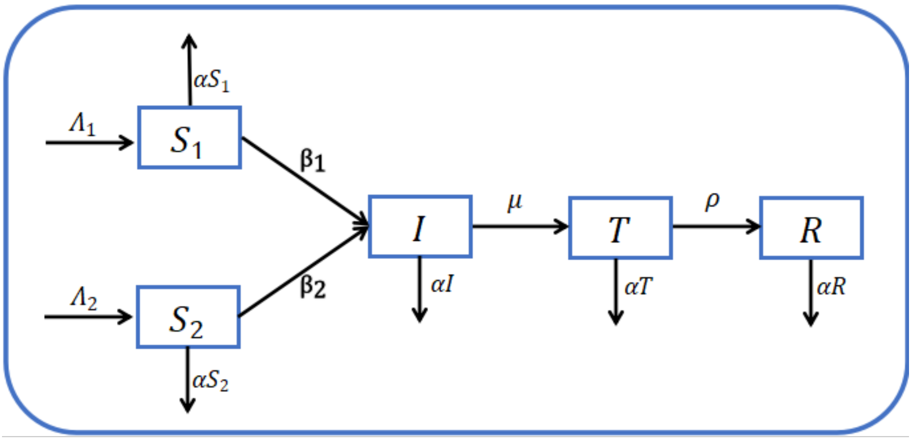
untuk $i = 1, 2, 3, ...$ sedemikian sehingga:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_i, z_i), \\
k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, z_i + \frac{h}{2}k_1\right), \\
k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, z_i + \frac{h}{2}k_2\right), \\
k_4 &= hf(t_i + h, z_i + hk_3).
\end{aligned}$$

2.5 Model Dinamik $SITR$ Penyebaran COVID-19

Rafiq dkk (2022) mengusulkan model $SITR$ untuk penyebaran COVID-19. Dalam subbab ini, model tersebut ditinjau kembali. Misal $S_1 = S_1(t)$ menyatakan subpopulasi individu rentan (*Susceptible 1*) yang belum berusia lanjut dan tidak komorbid pada waktu t, $S_2 = S_2(t)$ menyatakan subpopulasi rentan (*Susceptible 2*) dari individu yang berusia lanjut atau penyakit bawaan serius (komorbid) pada waktu t, $I = I(t)$ adalah subpopulasi individu terinfeksi (*Infected*) pada waktu t, $T = T(t)$ adalah subpopulasi individu terinfeksi yang dalam pengobatan (*Treatment*) pada waktu t, dan $R = R(t)$ adalah subpopulasi yang sembuh (*Recovered*) pada waktu t [14].

Diagram kompartemen model $SITR$ penyebaran COVID-19 dapat dilihat pada Gambar 2.5.2 dengan penjelasan parameter-parameter model diberikan dalam Tabel 2.5.1.



Gambar 2.5.2: Diagram Kompartemen Model $SITR$ COVID-19

Tabel 2.5.1: Deskripsi Parameter Model $SITR$

Parameter	**Keterangan**
Λ_1	Penambahan individu pada subpopulasi S_1
Λ_2	Penambahan individu pada subpopulasi S_2
α	Tingkat kematian alami
β_1	Tingkat penyebaran (penularan) COVID-19 pada subpopulasi S_1
β_2	Tingkat penyebaran (penularan) COVID-19 pada subpopulasi S_2
μ	Tingkat pengobatan pada subpopulasi terinfeksi
ρ	Tingkat kesembuhan pada subpopulasi terinfeksi dalam fase pengobatan

Berdasarkan Gambar 2.5.2, berikut ini dideskripsikan hal-hal yang mempengaruhi proses pembentukan model $SITR$ penyebaran COVID-19.

(a) Perubahan proporsi subpopulasi S_1 terhadap waktu.

Perubahan proporsi subpopulasi S_1 dipengaruhi oleh penambahan individu per satuan waktu, berkurang sebagai akibat adanya interaksi dengan subpopulasi terinfeksi, dan berkurang akibat adanya kematian dari subpopulasi tersebut. Dengan demikian, perubahan proporsi subpopulasi S_1

terhadap t dapat dinyatakan sebagai persamaan diferensial berikut:

$$\dot{S}_1 = \Lambda_1 - \beta_1 I S_1 - \alpha S_1. \tag{2.5.1}$$

(b) Perubahan proporsi subpopulasi S_2 terhadap waktu.

Perubahan proporsi subpopulasi S_2 dipengaruhi oleh penambahan individu per satuan waktu, berkurang sebagai akibat adanya interaksi dengan subpopulasi terinfeksi, dan berkurang akibat adanya kematian dari subpopulasi tersebut. Dengan demikian, perubahan proporsi subpopulasi S_2 terhadap t dapat dinyatakan sebagai persamaan diferensial berikut:

$$\dot{S}_2 = \Lambda_2 - \beta_2 I S_2 - \alpha S_2. \tag{2.5.2}$$

(c) Perubahan proporsi subpopulasi I terhadap waktu.

Perubahan proporsi subpopulasi I terhadap waktu meningkat akibat adanya penambahan proporsi subpopulasi S_1 dan S_2 yang terinfeksi COVID-19, berkurang karena adanya kematian, dan berkurang karena adanya pengobatan. Dengan demikian, perubahan proporsi subpopulasi I terhadap t dapat dinyatakan sebagai persamaan diferensial berikut:

$$\dot{I} = \beta_1 I S_1 + \beta_2 I S_2 - \alpha I - \mu I. \tag{2.5.3}$$

(d) Perubahan proporsi subpopulasi T terhadap waktu.

Perubahan proporsi subpopulasi T meningkat akibat adanya pengobatan, berkurang karena adanya kematian, dan berkurang karena adanya individu yang sembuh. Dengan demikian, perubahan proporsi subpopulasi T

terhadap t dapat dinyatakan sebagai persamaan diferensial berikut:

$$\dot{T} = \alpha I - \rho T - \alpha T. \tag{2.5.4}$$

(e) Perubahan proporsi subpopulasi R terhadap waktu.

Perubahan proporsi subpopulasi R meningkat akibat adanya individu yang sembuh dan berkurang karena adanya kematian. Dengan demikian, perubahan proporsi subpopulasi R terhadap t dapat dinyatakan sebagai persamaan diferensial berikut:

$$\dot{R} = \rho T - \alpha R. \tag{2.5.5}$$

Berdasarkan persamaan (2.5.1) - (2.5.5), model $SITR$ disajikan dalam bentuk sistem persamaan diferensial berikut:

$$\begin{aligned}
\dot{S}_1 &= \Lambda_1 - \beta_1 I S_1 - \alpha S_1, \\
\dot{S}_2 &= \Lambda_2 - \beta_2 I S_2 - \alpha S_2 \\
\dot{I} &= (\beta_1 S_1 + \beta_2 S_2) I - (\alpha + \mu) I, \\
\dot{T} &= \mu I - (\alpha + \rho) T, \\
\dot{R} &= \rho T - \mu R.
\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

Misalkan $S_1(0) = S_{10} \geq 0, \quad S_2(0) \geq 0, \quad I(0) \geq 0, \quad T(0) \geq 0, \quad R(0) \geq 0$. Pada model ini digunakan variabel-variabel tak bebas menyatakan proporsi subpopulasi. Hal ini sama saja dengan mengatakan $N = 1$. Maka total populasi adalah

$$N = S_1 + S_2 + I + T + R. \tag{2.5.7}$$

Jika semua model pada persamaan (2.5.7) diturunkan terhadap t dan mensubtitusikan (2.5.6) kepadanya, diperoleh

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \alpha N, \tag{2.5.8}$$

dengan $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$. Solusi dari (2.5.8) adalah

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}\frac{dN}{dt} + e^{\alpha t}\alpha N &= e^{\alpha t}(\Lambda_1 + \Lambda_2), \\ \frac{d}{dt}\left(e^{\alpha t}N\right) &= e^{\alpha t}(\Lambda_1 + \Lambda_2), \\ \int d\left(e^{\alpha t}N\right) &= \int e^{\alpha t}(\Lambda_1 + \Lambda_2)dt. \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

Dari persamaan (2.5.9) diperoleh

$$N(t) = \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)}{\alpha} + ce^{-\alpha t}, \tag{2.5.10}$$

dengan c adalah konstanta sebarang. Misal $N(0) = N_0$, maka

$$N(t) = \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)}{\alpha} + \left(N_0 - \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)}{\alpha}\right) e^{-\alpha t}. \tag{2.5.11}$$

Sistem persamaan (2.5.6) merupakan suatu sistem persamaan diferensial nonlinier yang kestabilannya dapat diperiksa dengan menggunakan teori dalam subbab 2.2. Ada dua macam titik tetap yang menggambarkan keadaan dari suatu sistem dalam teori epidemiologi, yaitu titik tetap bebas penyakit yang diperoleh dengan mengasumsikan $I = 0$ dan titik tetap endemik yang diperoleh dengan mengasumsikan $I > 0$ [2]. Titik tetap bebas penyakit adalah kondisi dimana populasi bebas dari penyakit sedangkan titik tetap endemik adalah kondisi dimana terdapat individu yang terinfeksi di dalam populasi.

Berdasarkan defenisi titik tetap dalam subbab 2.2, titik tetap diperoleh dengan membuat $\dot{S}_1 = \dot{S}_2 = \dot{I} = \dot{T} = \dot{R} = 0$. Dengan demikian, titik tetap bebas penyakit dari sistem persamaan (2.5.6) dinotasikan dengan $C^0 = ({S_1}^0, {S_2}^0, I^0, T^0, R^0)$ adalah

$$C^0 = \left(\frac{\Lambda_1}{\alpha}, \frac{\Lambda_2}{\alpha}, 0, 0, 0\right). \tag{2.5.12}$$

Sedangkan titik tetap endemik dari sistem persamaan (2.5.6) dinotasikan dengan $C^* = ({S_1}^*, {S_2}^*, I^*, T^*, R^*)$ adalah

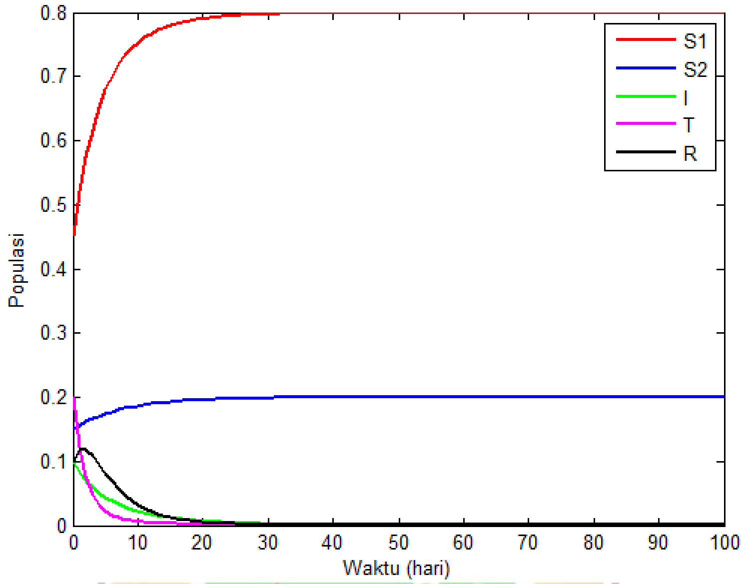
$$\begin{aligned} {S_1}^* &= \frac{\Lambda_1}{\beta_1 I^* + \alpha}, \\ {S_2}^* &= \frac{\Lambda_2}{\beta_2 I^* + \alpha}, \\ I^* &= \frac{(b-a) + \sqrt{(b-a)^2 + 4bc}}{2}, \\ T^* &= \frac{\mu I^*}{\alpha + \rho}, \\ R^* &= \frac{\rho I^*}{\alpha}, \end{aligned} \tag{2.5.13}$$

dengan

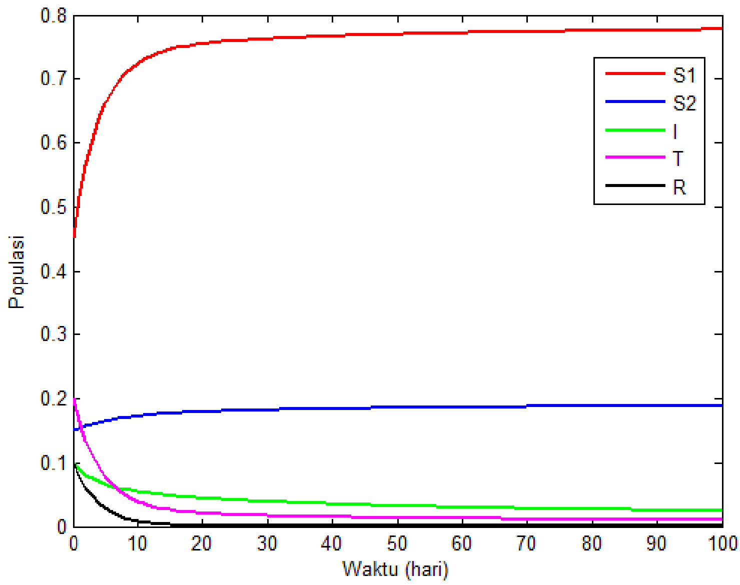
$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{{\beta_1}^2 \Lambda_1 + {\beta_2}^2 \Lambda_2}{\beta_1 \beta_2 (\alpha + \mu)}\right), \\ b &= \alpha\left(\frac{\beta_1 \Lambda_1 + \beta_2 \Lambda_2}{\alpha(\alpha + \mu)} - 1\right), \\ c &= \frac{\alpha}{\beta_1 \beta_2}. \end{aligned}$$

Untuk parameter $\Lambda_1 = 0,2$, $\Lambda_2 = 0,05$, $\alpha = 0,25$, $\beta_1 = 0,2$, $\beta_2 = 0,4$, $\mu = 0,1$, $\rho = 0,3$, $S_1(0) = 0,45$, $S_2(0) = 0,15$, $I(0) = 0,1$, $T(0) = 0,2$, dan $R(0) = 0,1$, diperoleh titik tetap bebas penyakit $C^0 = (0,8,\ 0,2,\ 0,\ 0,\ 0)$. Grafik solusi model $SITR$ (2.5.6) diberikan dalam Gambar 2.5.3 [14].

Selanjutnya, untuk parameter $\beta_1 = 0,3$ dan $\beta_2 = 0,6$ diperoleh titik tetap bebas penyakit $C^* = (0.78316,\ 0.19175,\ 0.01792,\ 0.00326,\ 0.00391)$. Grafik solusi model $SITR$ (2.5.6) diberikan dalam Gambar 2.5.4 [14].



Gambar 2.5.3: Grafik solusi dengan $I = 0$



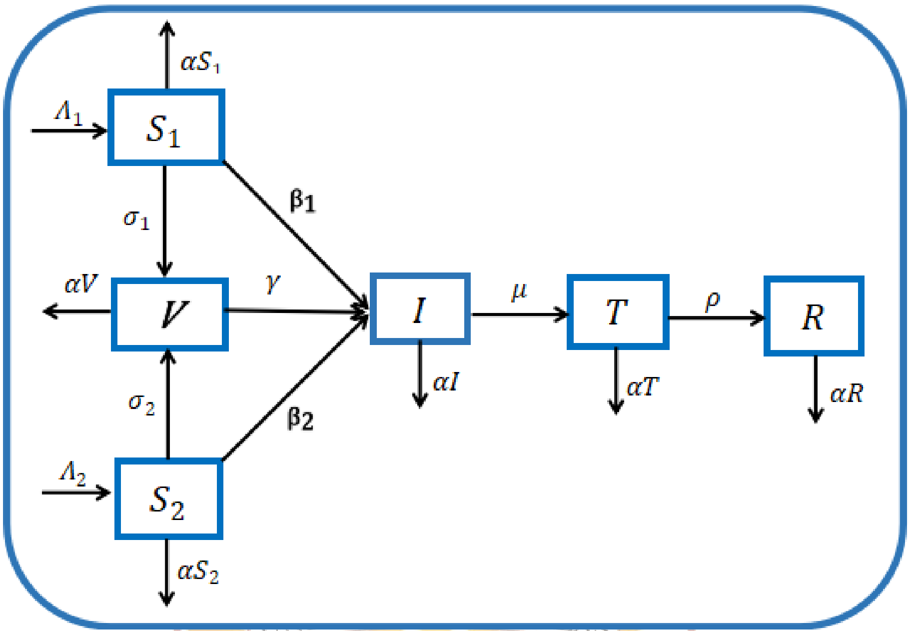
Gambar 2.5.4: Grafik solusi dengan $I > 0$

BAB III

MODEL $SITR$ PENYEBARAN COVID-19 DENGAN VAKSINASI

3.1 Formulasi Model $SITR$ Pandemi COVID-19 Dengan Vaksinasi

Salah satu upaya untuk menurunkan jumlah populasi yang terinfeksi adalah dengan pemberian vaksin kepada individu yang rentan sehingga meningkatkan kekebalan tubuh individu. Penelitian ini memodifikasi model yang dikembangkan oleh Rafiq dkk (2022), dengan pemberian vaksinasi yang diberikan pada subpopulasi rentan. Misalkan $V = V(t)$ adalah subpopulasi baru yang berasal dari subpopulasi rentan yang telah divaksin, dengan σ_1 dinyatakan sebagai laju vaksinasi pada *Susceptible 1* dan σ_2 sebagai laju vaksinasi pada *Susceptible 2*. Subpopulasi vaksin akan terinfeksi apabila tingkat kekebalan imun dari individu yang telah divaksin menurun atau berkontak langsung dengan individu yang terinfeksi, dengan laju penyebarannya dinyatakan dengan parameter γ. Diagram kompartemen model $SITR$ penyebaran COVID-19 dengan mempertimbangkan vaksinasi diberikan dalam Gambar 3.1.1.



Gambar 3.1.1: Diagram Kompartemen $SITR$ Penyebaran COVID-19 dengan Vaksinasi

Model $SITR$ dengan mempertimbangkan vaksinasi disajikan dalam sistem persamaan diferensial berikut:

$$\begin{aligned}
\dot{S}_1 &= \Lambda_1 - \beta_1 I S_1 - \sigma_1 S_1 - \alpha S_1, \\
\dot{S}_2 &= \Lambda_2 - \beta_2 I S_2 - \sigma_2 S_2 - \alpha S_2, \\
\dot{V} &= \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 - \gamma I V - \alpha V, \\
\dot{I} &= (\beta_1 S_1 + \beta_2 S_2 + \gamma V) I - (\alpha + \mu) I, \\
\dot{T} &= \mu I - (\alpha + \rho) T, \\
\dot{R} &= \rho T - \alpha R,
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

dengan semua nilai parameter lebih dari nol, nilai awal $S_1(0) \geq 0,\ S_2(0) \geq 0,\ V(0) \geq 0,\ I(0) \geq 0,\ T(0) \geq 0,\ R(0) \geq 0$. Total populasi adalah

$$N = S_1 + S_2 + V + I + T + R. \tag{3.1.2}$$

3.2 Analisis Kestabilan Model

Untuk menganalisis kestabilan model (3.1.1) perlu ditentukan terlebih dahulu titik tetap bebas penyakit dan titik tetap endemik. Kemudian, dilanjutkan dengan menganalis kestabilannya pada titik-titik tetap tersebut.

3.2.1 Penentuan Titik Tetap

Berdasarkan defenisi titik tetap dalam subbab 2.2 untuk memperoleh titik tetap, maka $\dot{S}_1 = \dot{S}_2 = \dot{V} = \dot{I} = \dot{T} = \dot{R} = 0$, sedemikian sehingga

$$
\begin{aligned}
\dot{S}_1 = 0 \Rightarrow \Lambda_1 - \beta_1 I S_1 - \sigma_1 S_1 - \alpha S_1 &= 0, \\
S_1 &= \frac{\Lambda_1}{\beta_1 I + (\alpha + \sigma_1)}, && (3.2.1) \\
\dot{S}_2 = 0 \Rightarrow \Lambda_2 - \beta_2 I S_2 - \sigma_2 S_2 - \alpha S_2 &= 0, \\
S_2 &= \frac{\Lambda_2}{\beta_2 I + (\alpha + \sigma_2)}, && (3.2.2) \\
\dot{V} = 0 \Rightarrow \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 - \gamma I V - \alpha V &= 0, \\
V &= \frac{\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2}{\gamma I + \alpha}, && (3.2.3) \\
\dot{I} = 0 \Rightarrow (\beta_1 S_1 + \beta_2 S_2 + \gamma V) I - (\alpha + \mu) I &= 0, && (3.2.4) \\
\dot{T} = 0 \Rightarrow \mu I - (\alpha + \rho) T &= 0, \\
T &= \frac{\mu I}{(\rho + \alpha)}, && (3.2.5) \\
\dot{R} = 0 \Rightarrow \rho T - \alpha R &= 0, \\
R &= \frac{\rho T}{\alpha}. && (3.2.6)
\end{aligned}
$$

(a) Titik Tetap Bebas Penyakit

Titik tetap bebas penyakit adalah suatu keadaan tidak terjadi penyebaran COVID-19 dalam suatu populasi. Misalkan $I = 0$ maka persamaan (3.2.1), (3.2.2), dan (3.2.3) menjadi

$$S_1^0 = \frac{\Lambda_1}{(\alpha + \sigma_1)}, \tag{3.2.7}$$

$$S_2^0 = \frac{\Lambda_2}{(\alpha + \sigma_2)}, \tag{3.2.8}$$

$$V^0 = \frac{\sigma_1 S_1^0 + \sigma_2 S_2^0}{\alpha}. \tag{3.2.9}$$

Dari persamaan (3.2.5) diperoleh

$$T^0 = \frac{\mu(0)}{(\rho + \alpha)} \quad \Rightarrow \quad T^0 = 0,$$

dan dari persamaan (3.2.6) diperoleh

$$R^0 = \frac{\rho(0)}{\alpha} \Rightarrow R^0 = 0.$$

Jadi, diperoleh titik tetap bebas penyakit, yaitu

$$C^0 = \left(\frac{\Lambda_1}{(\alpha + \sigma_1)}, \ \frac{\Lambda_2}{(\alpha + \sigma_2)}, \ \frac{\sigma_1 \Lambda_1 (\alpha + \sigma_2) + \sigma_2 \Lambda_2 (\alpha + \sigma_1)}{\alpha(\alpha + \sigma_1)(\alpha + \sigma_2)}, \ 0, \ 0, \ 0 \right). \tag{3.2.10}$$

(b) Titik Tetap Endemik

Titik tetap endemik adalah suatu keadaan dimana terjadi infeksi penyakit di dalam suatu populasi sehingga $I > 0$. Jika $I > 0$ maka persamaan

(3.2.1), (3.2.2), (3.2.3), (3.2.5), dan (3.2.6) menjadi

$$
\begin{aligned}
S_1^* &= \frac{\Lambda_1}{\beta_1 I^* + (\alpha + \sigma_1)}, \\
S_2^* &= \frac{\Lambda_2}{\beta_2 I^* + (\alpha + \sigma_2)}, \\
V^* &= \frac{\sigma_1 S_1^* + \sigma_2 S_2^*}{\gamma I^* + \alpha}, \\
T^* &= \frac{\mu I^*}{(\rho + \alpha)}, \\
R^* &= \frac{\rho T^*}{\alpha}.
\end{aligned}
\tag{3.2.11}
$$

Dari persamaan (3.2.4) diperoleh

$$
\beta_1 S_1^* + \beta_2 S_2^* + \gamma V^* = \alpha + \mu, \tag{3.2.12}
$$

dengan mensubtitusikan persamaan V^* pada (3.2.11) ke dalam persamaan (3.2.12), diperoleh

$$
\begin{aligned}
(\beta_1 S_1^* + \beta_2 S_2^* + \gamma\left(\frac{\sigma_1 S_1^* + \sigma_2 S_2^*}{(\gamma I^* + \alpha)}\right) &= (\alpha + \mu), \\
\beta_1 S_1^*(\gamma I^* + \alpha) + \beta_2 S_2^*(\gamma I^* + \alpha) + \gamma(\sigma_1 S_1^* + \sigma_2 S_2^*) &= (\alpha + \mu)(\gamma I^* + \alpha), \\
(\alpha\beta_1 + \gamma\sigma_1)S_1^* + (\alpha\beta_2 + \gamma\sigma_2)S_2^* - (\alpha + \mu)\alpha &= [(\alpha + \mu) - (\beta_1 S_1^* + \beta_2 S_2^*)]\gamma I^*, \\
\frac{(\alpha\beta_1 + \gamma\sigma_1)S_1^* + (\alpha\beta_2 + \gamma\sigma_2)S_2^* - (\alpha + \mu)\alpha}{[(\alpha + \mu) - (\beta_1 S_1^* + \beta_2 S_2^*)]\gamma} &= I^*.
\end{aligned}
\tag{3.2.13}
$$

Dengan demikian, diperoleh titik tetap endemik $C^* = (S_1^*,\ S_2^*,\ V^*,\ I^*,\ T^*,\ R^*)$ dengan $S_1^*,\ S_2^*, V^*,\ I^*,\ T^*$, dan R^* diberikan oleh persamaan (3.2.11) dan (3.2.13).

3.2.2 Analisis Kestabilan Titik Tetap

Model (3.1.1) merupakan sistem nonlinier. Oleh karena itu, untuk menentukan kestabilan dari sistem (3.1.1) di titik-titik tetap C^0 dan C^*, maka sistem tersebut perlu dilinierisasi. Jacobian dari sistem (3.1.1) adalah

$$J_C = \begin{bmatrix} -(\beta_1 I + (\alpha+\sigma_1)) & 0 & 0 & -\beta_1 S_1 & 0 & 0 \\ 0 & -(\beta_2 I + (\alpha+\sigma_2)) & 0 & -\beta_2 S_2 & 0 & 0 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & -(\gamma I + \alpha) & \gamma V & 0 & 0 \\ \beta_1 I & \beta_2 I & \gamma I & (\beta_1 S_1 + \beta_2 S_2 + \gamma V) & 0 & 0 \\ & & & -(\mu+\alpha) & & \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -(\alpha+\rho) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho & -\alpha \end{bmatrix}.$$

(a) Kestabilan Titik Tetap Bebas Penyakit

Di titik tetap bebas penyakit C^0, Jacobian J_{C^0} adalah,

$$J_{C^0} = \begin{bmatrix} -(\alpha+\sigma_1) & 0 & 0 & -\beta_1 S_1^0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\alpha+\sigma_2) & 0 & -\beta_2 S_2^0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & -\alpha & \gamma V^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\beta_1 S_1^0 + \beta_2 S_2^0 + \gamma V^0) - (\mu+\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -(\alpha+\rho) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho & -\alpha \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen matriks Jacobian J_{C^0}, diperoleh dengan menyelesaikan persamaan det $(\lambda I_6 - J_{C^0}) = 0$, yaitu

$$\begin{vmatrix} \lambda+(\alpha+\sigma_1) & 0 & 0 & \beta_1 S_1^0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+(\alpha+\sigma_2) & 0 & \beta_2 S_2^0 & 0 & 0 \\ -\sigma_1 & -\sigma_2 & \lambda+\alpha & -\gamma V^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+(\beta_1 S_1^0+\beta_2 S_2^0+\gamma V^0-(\mu+\alpha)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \lambda+(\alpha+\rho) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & \lambda+\alpha \end{vmatrix} = 0,$$

$$[\lambda+\alpha][\lambda+(\alpha+\rho)][\lambda+\alpha] \begin{vmatrix} \lambda+(\alpha+\sigma_1) & 0 & \beta_1 S_1^0 \\ 0 & \lambda+(\alpha+\sigma_2) & \beta_2 S_2^0 \\ 0 & 0 & \lambda+(\beta_1 S_1^0+\beta_2 S_2^0+\gamma V^0-(\mu+\alpha)) \end{vmatrix} = 0,$$

yang menghasilkan nilai eigen

$$\lambda_1 = -\alpha, \quad \lambda_2 = -(\alpha+\rho), \quad \lambda_3 = -\alpha. \tag{3.2.14}$$

Selanjutnya, untuk nilai eigen $\lambda_4,\ \lambda_5,\ \lambda_6$ ditentukan dari

$$\begin{vmatrix} \lambda + (\alpha+\sigma_1) & 0 & \beta_1 S_1^0 \\ 0 & \lambda + (\alpha+\sigma_2) & \beta_2 S_2^0 \\ 0 & 0 & \lambda + (\beta_1 S_1^0 + \beta_2 S_2^0 + \gamma V^0 - (\mu+\alpha)) \end{vmatrix} = 0,$$

yaitu

$$[\lambda + (\alpha+\sigma_1)][\lambda + (\alpha+\sigma_2)][\lambda + (\beta_1 S_1^0 + \beta_2 S_2^0 + \gamma V^0 - (\mu+\alpha))] = 0. \quad (3.2.15)$$

Dari persamaan (3.2.15) diperoleh nilai eigen

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= -(\alpha+\sigma_1), \quad \lambda_5 = -(\alpha+\sigma_2), \\ \lambda_6 &= (\beta_1 S_1^0 + \beta_2 S_2^0 + \gamma V^0 - (\mu+\alpha)). \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Dengan demikian, diperoleh nilai eigen dari matriks Jacobian J_{C^0} yaitu, $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0,\ \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0,\ \lambda_5 < 0$. Berdasarkan kriteria kestabilan, titik tetap C^0 stabil asimtotik jika $\lambda_6 < 0$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \lambda_6 &= (\beta_1 S_1^0 + \beta_2 S_2^0 + \gamma V^0 - (\mu+\alpha)) < 0, \\ &\Rightarrow \frac{(\beta_1 S_1^0 + \beta_2 S_2^0 + \gamma V^0}{(\mu+\alpha)} < 1. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Subtitukan (3.2.7), (3.2.8), dan (3.2.9) pada (3.2.17), diperoleh

$$\frac{(\alpha\beta_1 + \gamma\sigma_1)\Lambda_1(\alpha+\sigma_2) + (\alpha\beta_2 + \gamma\sigma_2)\Lambda_2(\alpha+\sigma_1)}{\alpha(\mu+\alpha)(\alpha+\sigma_1)(\alpha+\sigma_2)} < 1. \quad (3.2.18)$$

(b) Kestabilan Titik Tetap Endemik

Di titik tetap endemik C^*, Jacobian J_{C^*} adalah

$$J_{C^*} = \begin{bmatrix} -(\beta_1 I^* + (\alpha+\sigma_1)) & 0 & 0 & -\beta_1 S_1^* & 0 & 0 \\ 0 & -(\beta_2 I^* + (\alpha+\sigma_2)) & 0 & -\beta_2 S_2^* & 0 & 0 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & -(\gamma I^* + \alpha) & \gamma V^* & 0 & 0 \\ \beta_1 I^* & \beta_2 I^* & \gamma I^* & (\beta_1 S_1^* + \beta_2 S_2^* + \gamma V^*) - (\mu+\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -(\alpha+\rho) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho & -\alpha \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen matriks Jacobian J_{C^*}, diperoleh dengan menyelesaikan persamaan det $(\lambda I_6 - J_{C^*}) = 0$, yaitu

$$\begin{vmatrix} \lambda + (\beta_1 I^* + (\alpha + \sigma_1)) & 0 & 0 & \beta_1 S_1^* & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + (\beta_2 I^* + (\alpha + \sigma_2)) & 0 & \beta_2 S_2^* & 0 & 0 \\ -\sigma_1 & -\sigma_2 & \lambda + (\gamma I^* + \alpha) & -\gamma V^* & 0 & 0 \\ -\beta_1 I^* & -\beta_2 I^* & -\gamma I^* & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \lambda + (\alpha + \rho) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & \lambda + \alpha \end{vmatrix} = 0,$$

$$[\lambda + \alpha][\lambda + (\alpha + \rho)] \begin{vmatrix} \lambda + (\beta_1 I^* + (\alpha + \sigma_1)) & 0 & 0 & \beta_1 S_1^* \\ 0 & \lambda + (\beta_2 I^* + (\alpha + \sigma_2)) & 0 & \beta_2 S_2^* \\ -\sigma_1 & -\sigma_2 & \lambda + (\gamma I^* + \alpha) & -\gamma V^* \\ -\beta_1 I^* & -\beta_2 I^* & -\gamma I^* & \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

yang menghasilkan nilai eigen

$$\lambda_1 = -\alpha, \quad \lambda_2 = -(\alpha + \rho). \tag{3.2.19}$$

Selanjutnya, nilai eigen $\lambda_3,\ \lambda_4,\ \lambda_5,\ \lambda_6$ ditentukan dari

$$\begin{vmatrix} \lambda + (\beta_1 I^* + (\alpha + \sigma_1)) & 0 & 0 & \beta_1 S_1^* \\ 0 & \lambda + (\beta_2 I^* + (\alpha + \sigma_2)) & 0 & \beta_2 S_2^* \\ -\sigma_1 & -\sigma_2 & \lambda + (\gamma I^* + \alpha) & -\gamma V^* \\ -\beta_1 I^* & -\beta_2 I^* & -\gamma I^* & \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

yaitu

$$[\lambda + (\gamma I^* + \alpha)] \begin{vmatrix} \lambda + (\beta_1 I^* + (\alpha + \sigma_1)) & 0 & \beta_1 S_1^* \\ 0 & \lambda + (\beta_2 I^* + (\alpha + \sigma_2)) & \beta_2 S_2^* \\ -\beta_1 I^* & -\beta_2 I^* & \lambda \end{vmatrix}$$

$$+[\gamma I^*] \begin{vmatrix} \lambda + (\beta_1 I^* + (\alpha + \sigma_1)) & 0 & \beta_1 S_1^* \\ 0 & \lambda + (\beta_2 I^* + (\alpha + \sigma_2)) & \beta_2 S_2^* \\ -\sigma_1 & -\sigma_2 & -\gamma V^* \end{vmatrix} = 0, \tag{3.2.20}$$

$$[\lambda + (\gamma I^* + \alpha)][(\lambda + (\beta_1 I^* + (\alpha + \sigma_1))(\lambda + (\beta_2 I^* + (\alpha + \sigma_2))(\lambda) + (\beta_1 I^*)$$
$$(\lambda + (\beta_2 I^* + (\alpha + \sigma_2)))(\beta_1 S_1^*) + (\beta_2 I^*)(\beta_2 S_2^*)(\lambda + (\beta_1 I^* + (\alpha + \sigma_1)))] +$$
$$[\gamma I^*][(\lambda + (\beta_1 I^* + (\alpha + \sigma_1)))(\lambda + (\beta_2 I^* + (\alpha + \sigma_2)))(-\gamma V^*) + (\sigma_1)(\lambda +$$
$$(\beta_2 I^* + (\alpha + \sigma_2)))(\beta_1 S_1^*) + (\sigma_2)(\beta_2 S_2^*)(\lambda + (\beta_1 I^* + (\alpha + \sigma_1)))] = 0. \quad (3.2.21)$$

Misalkan

$$A = \gamma I^* + \alpha, \quad B = \beta_1 I^* + (\alpha + \sigma_1), \quad C = \beta_2 I^* + (\alpha + \sigma_2), \quad (3.2.22)$$

maka persamaan (3.2.27) menjadi

$$[\lambda + A][(\lambda + B)(\lambda + C)(\lambda) + (\beta_1 I^*)(\lambda + C)(\beta_1 S_1^*) + (\beta_2 I^*)(\beta_2 S_2^*)(\lambda + B)]$$
$$+[\gamma I^*][(\lambda + B)(\lambda + C)(-\gamma V^*) + (\sigma_1)(\lambda + C)(\beta_1 S_1^*) + (\sigma_2)(\beta_2 S_2^*)(\lambda + B)] = 0,$$
$$[\lambda + A][\lambda^3 + (B + C)\lambda^2 + (BC + {\beta_1}^2 I^* S_1^* + {\beta_2}^2 I^* S_2^*)\lambda + (C{\beta_1}^2 I^* S_1^* + B{\beta_2}^2 I^* S_2^*)]$$
$$+[\gamma I^*][(-\gamma V^*)\lambda^2 + (\sigma_1 \beta_1 S_1^* + \sigma_2 \beta_2 S_2^* - (B + C)\gamma V^*)\lambda + (C\sigma_1 \beta_1 I^* S_1^* + B\sigma_2 \beta_2 S_2^*$$
$$-BC\gamma V^*)] = 0,$$
$$[\lambda^4 + (A + B + C)\lambda^3 + (A(B + C) + BC + {\beta_1}^2 I^* S_1^* + {\beta_2}^2 I^* S_2^*)\lambda^2$$
$$+(ABC + (A + C){\beta_1}^2 I^* S_1^* + (A + B){\beta_2}^2 I^* S_2^*)\lambda + (AC{\beta_1}^2 I^* S_1^* + AB{\beta_2}^2 I^* S_2^*)]$$
$$+[-\gamma^2 I^* V^* \lambda^2 + (\sigma_1 \gamma \beta_1 I^* S_1^* + \sigma_2 \gamma \beta_2 I^* S_2^* - (B + C)\gamma^2 I^* V^*)\lambda + (C\sigma_1 \gamma \beta_1 I^* S_1^*$$
$$+B\sigma_2 \gamma \beta_2 I^* S_2^* - BC\gamma^2 I^* V^*)] = 0,$$
$$\lambda^4 + \{(A + B + C)\}\lambda^3 + \{(A(B + C) + BC + {\beta_1}^2 I^* S_1^* + {\beta_2}^2 I^* S_2^* - \gamma^2 I^* V^*\}\lambda^2 +$$
$$\{ABC + ((A + C)\beta_1 + \gamma\sigma_1)\beta_1 I^* S_1^* + ((A + B)\beta_2 + \gamma\sigma_2)\beta_2 I^* S_3^* - (B + C)\gamma^2 I^* V^*\}\lambda$$
$$+\{(A\beta_1 + \sigma_1 \gamma)C\beta_1 I^* S_1^* + (A\beta_2 + \sigma_2 \gamma)B\beta_2 I^* S_2^* - BC\gamma^2 I^* V^*\} = 0. \quad (3.2.23)$$

Misalkan

$$a_1 = (A + B + C), \quad (3.2.24)$$
$$a_2 = A(B + C) + BC + {\beta_1}^2 I^* S_1^* + {\beta_2}^2 I^* S_2^* - \gamma^2 I^* V^*, \quad (3.2.25)$$
$$a_3 = ABC + ((A + C)\beta_1 + \gamma\sigma_1)\beta_1 I^* S_1^* + ((A + B)\beta_2 + \gamma\sigma_2)\beta_2 I^* S_2^*$$
$$-(B + C)\gamma^2 I^* V^*, \quad (3.2.26)$$

$$a_4 = (A\beta_1 + \sigma_1\gamma)C\beta_1 I^* S_1^* + (A\beta_2 + \sigma_2\gamma)B\beta_2 I^* S_2^* - BC\gamma^2 I^* V^*, \tag{3.2.27}$$

maka persamaan (3.2.23) menjadi

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0. \tag{3.2.28}$$

Berdasarkan Teorema 2.3.2 λ_3, λ_4, λ_5, λ_6 yang merupakan akar-akar dari persamaan (3.2.23) memiliki semua bagian riil negatif jika memenuhi syarat (2.3.3), (2.3.4), dan (2.3.5). Dikarenakan S_1^*, S_2^*, V^*, I^*, dan parameter α, β_1, δ_1, σ_1, σ_2, γ, μ, ρ semua positif, maka $A > 0$, $B > 0$, dan $C > 0$, sehingga syarat (2.3.3) adalah

$$a_1 = A + B + C > 0. \tag{3.2.29}$$

Untuk syarat (2.3.4), subtitusikan (3.2.24), (3.2.25), dan (3.2.26) dalam (2.3.4), diperoleh

$$\begin{aligned} a_1a_2 - a_3 = & \ [\{A+B+C\}\{(A(B+C)+BC+{\beta_1}^2 I^* S_1^* + {\beta_2}^2 I^* S_2^* - \gamma^2 I^* V^*\}] \\ & -[ABC + ((A+C)\beta_1 + \gamma\sigma_1)\beta_1 I^* S_1^* + ((A+B)\beta_2 + \gamma\sigma_2)\beta_2 I^* S_2^* \\ & -(B+C)\gamma^2 I^* V^*] > 0. \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

Penyederhanaan (3.2.30) menghasilkan

$$\begin{aligned} & [(A^2B + A^2C + AB^2 + AC^2 + B^2C + BC^2 + 3ABC) + A{\beta_1}^2 I^* S_1^* \\ & + C{\beta_1}^2 I^* S_1^* + B{\beta_1}^2 I^* S_1^* + (A+B){\beta_2}^2 I^* S_2^* + C{\beta_2}^2 I^* S_2^* - A\gamma^2 I^* V^* \\ & -(B+C)\gamma^2 I^* V^*] - [ABC + (A+C)\beta_1^2 I^* S_1^* + \gamma\sigma_1\beta_1 I^* S_1^* \\ & +(A+B)\beta_2^2 I^* S_2^* + \gamma\sigma_2\beta_2 I^* S_2^* - (B+C)\gamma^2 I^* V^*] > 0, \\ & [(A^2(B+C) + B^2(A+C) + C^2(A+B) + 2ABC) + B{\beta_1}^2 I^* S_1^* \\ & + C{\beta_2}^2 I^* S_2^*] - [\gamma I^*(A\gamma V^* + \sigma_1\beta_1 S_1^* + \sigma_2\beta_2 S_2^*)] > 0, \end{aligned}$$

$$\frac{[(A^2(B+C)+B^2(A+C)+C^2(A+B)+2ABC)+B\beta_1{}^2I^*S_1^*+C\beta_2{}^2I^*S_2^*]}{[\gamma I^*(A\gamma V^*+\sigma_1\beta_1S_1^*+\sigma_2\beta_2S_2^*)]}>1. \tag{3.2.31}$$

Untuk syarat (2.3.5), subtitusikan (3.2.26) dan (3.2.27) pada (2.3.5), diperoleh

$$\begin{aligned} a_3a_4 &= \big[ABC+((A\beta_1+\gamma\sigma_1)\beta_1I^*S_1^*+C\beta_1^2I^*S_1^*+((A\beta_2+\gamma\sigma_2)\beta_2I^*S_2^* \\ &\quad +B\beta_2^2I^*S_2^*-(B+C)\gamma^2I^*V^*\big]\big[(A\beta_1+\sigma_1\gamma)C\beta_1I^*S_1^* \\ &\quad +(A\beta_2+\sigma_2\gamma)B\beta_2I^*S_2^*-BC\gamma^2I^*V^*\big]>0. \end{aligned} \tag{3.2.32}$$

Misalkan $X=(A\beta_1+\gamma\sigma_1)\beta_1I^*S_1^*$, $Y=(A\beta_2+\gamma\sigma_2)\beta_2I^*S_2^*$, $Z_1=\beta_1^2I^*S_1^*$, $Z_2=\beta_2^2I^*S_2^*$, dan $Z_3=\gamma^2I^*V^*$. Maka pertidaksamaan (3.2.32) menjadi

$$\begin{aligned} &\big[ABC+X+CZ_1+Y+BZ_2-(B+C)Z_3\big]\big[CX+BY-BCZ_3\big]>0, \\ &(ABC^2+AB^2CY-AB^2C^2Z_3)+(CX^2+BXY-BCXZ_3)+(C^2XZ_1 \\ &+BCYZ_1-BC^2Z_1Z_3)+(BY^2+CXY-BCYZ_3)+(B^2YZ_2+BCXZ_2 \\ &-B^2CZ_2Z_3)-((B+C)CXZ_3+(B+C)BYZ_3-(B+C)BCZ_3^2)>0, \\ &\{(ABC^2+BCZ_2+CX+C^2Z_1)X+(AB^2C+BCZ_1+B^2Z_2+BY)Y \\ &+(B+C)XY+BC(B+C)Z_3^2\}-\{(AB^2C^2+(2BC+C^2)X+(2BC+B^2)Y \\ &+B^2CZ_1+BC^2Z_2+BC(B+C)Z_3)Z_3\}>0, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} &\frac{(ABC^2+BCZ_2+CX+C^2Z_1)X+(AB^2C+BCZ_1+B^2Z_2+BY)Y}{(AB^2C^2+(2BC+C^2)X+(2BC+B^2)Y+B^2CZ_1+BC^2Z_2+BC(B+C)Z_3)Z_3}+ \\ &\frac{(B+C)XY+BC(B+C)Z_3^2}{(AB^2C^2+(2BC+C^2)X+(2BC+B^2)Y+B^2CZ_1+BC^2Z_2+BC(B+C)Z_3)Z_3}>1. \end{aligned} \tag{3.2.33}$$

Dengan demikian, titik tetap endemik $C^*=(S_1^*,\ S_2^*,\ V^*,\ I^*,\ T^*,\ R^*)$ adalah stabil asimtotik jika (3.2.29), (3.2.31), dan (3.2.33) terpenuhi.

3.3 Simulasi Numerik

Untuk memperlihatkan keberlakuan syarat (3.2.18), (3.2.29), (3.2.31), dan (3.2.33), perhatikan Tabel 3.3.1 dan Tabel 3.3.2 dengan nilai-nilai parameter yang diberikan di dalamnya.

Tabel 3.3.1: Nilai-nilai Parameter Titik Tetap bebas Penyakit

No	Parameter	Nilai	Sumber	No	Parameter	Nilai	Sumber
1	Λ_1	0.2	[14]	9	σ_2	0.006	Asumsi
2	Λ_2	0.05	[14]	10	γ	0.01	Asumsi
3	β_1	0.2	[14]	11	$S_1(0)$	0.45	[14]
4	β_2	0.4	[14]	12	$S_2(0)$	0.15	[16]
5	α	0.25	[16]	13	$I(0)$	0.1	[16]
6	μ	0.1	[16]	14	$T(0)$	0.2	[16]
7	ρ	0.3	[16]	15	$R(0)$	0.1	[16]
8	σ_1	0.007	Asumsi	16	$V(0)$	0	Asumsi

Berdasarkan (3.2.10), (3.2.11), dan (3.2.13), titik tetap bebas penyakit adalah

$$C^0 = (0.77821,\ 0.19531,\ 0.02648,\ 0,\ 0,\ 0)\,. \tag{3.3.1}$$

dan titik tetap endemik adalah $C^* = (S_1^*,\ S_2^*,\ V^*,\ I^*,\ T^*,\ R^*)$, dengan

$$\begin{aligned} S_1^* &= 0.77581, \quad S_2^* = 0.19448, \\ V^* &= 0.02833, \quad I^* = 0.00098, \\ T^* &= 0.00018, \quad R^* = 0.00021. \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Tabel 3.3.2: Nilai-nilai Parameter Titik Tetap Endemik

No	**Parameter**	**Nilai**	**Sumber**	**No**	**Parameter**	**Nilai**	**Sumber**
1	Λ_1	0.2	[14]	6	μ	0.1	[16]
2	Λ_2	0.05	[14]	7	ρ	0.3	[16]
3	β_1	0.3	[14]	8	σ_1	0.0075	Asumsi
4	β_2	0.6	[14]	9	σ_2	0.0065	Asumsi
5	α	0.25	[16]	10	γ	0.02	Asumsi

Untuk menganalisis kestabilan titik tetap dari model (3.1.1) subtitusikan nilai-nilai parameter pada Table 3.3.1 ke dalam (3.2.14) dan (3.2.16), sehingga diperoleh nilai eigen untuk kestabilan titik tetap bebas penyakit, yaitu

$$\lambda_1 = -0.25, \ \ \lambda_2 = -0.35, \ \ \lambda_3 = -0.25\lambda_4 = -0.257, \ \ \lambda_5 = -0.256,$$
$$\lambda_6 = -0.1159682029.$$

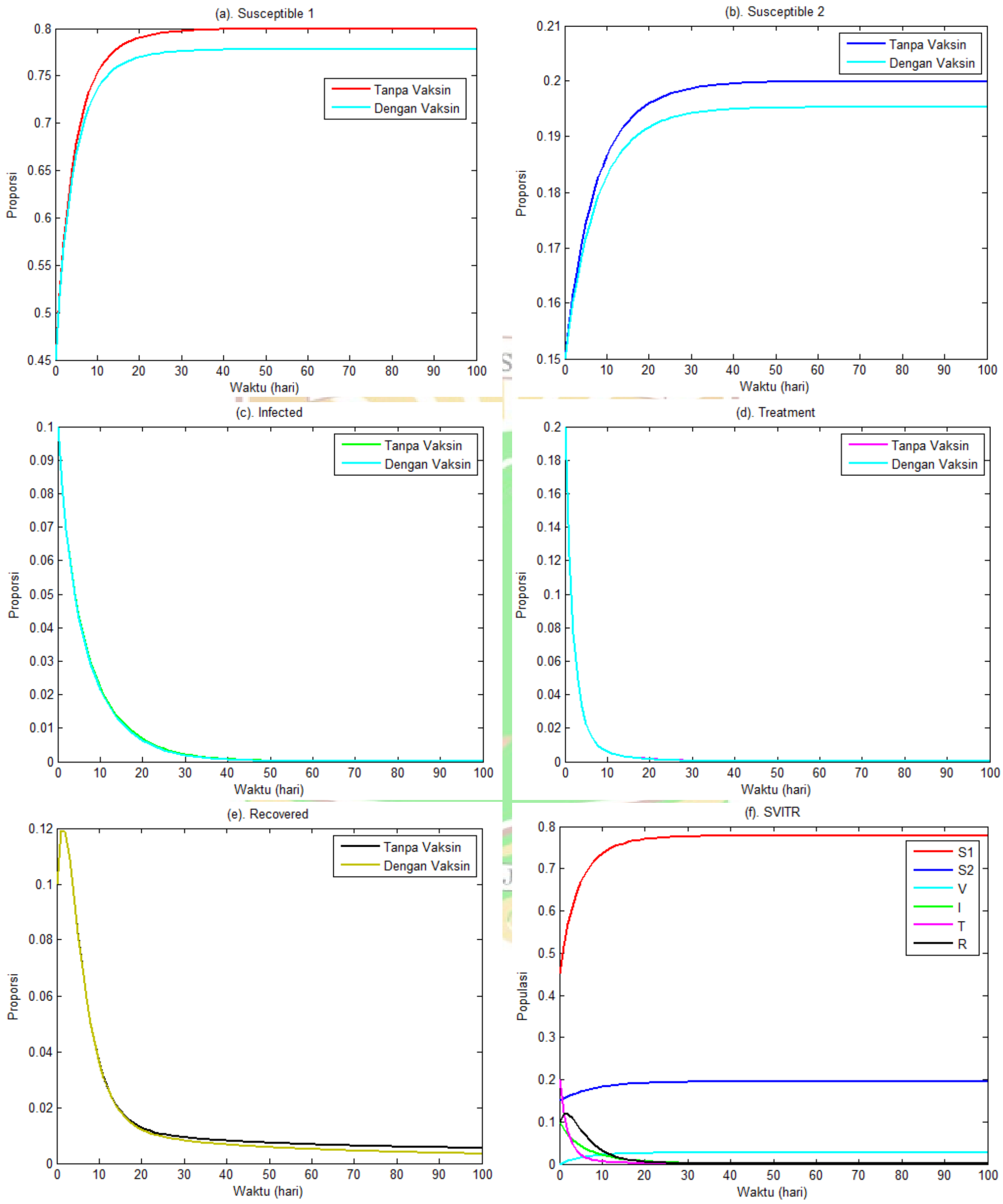
Selanjutnya, untuk titik tetap endemik dari model (3.1.1), perhatikan Tabel 3.3.2. Dari (3.2.19), diperoleh

$$\lambda_1 = -0.25, \quad \lambda_2 = -0.55.$$

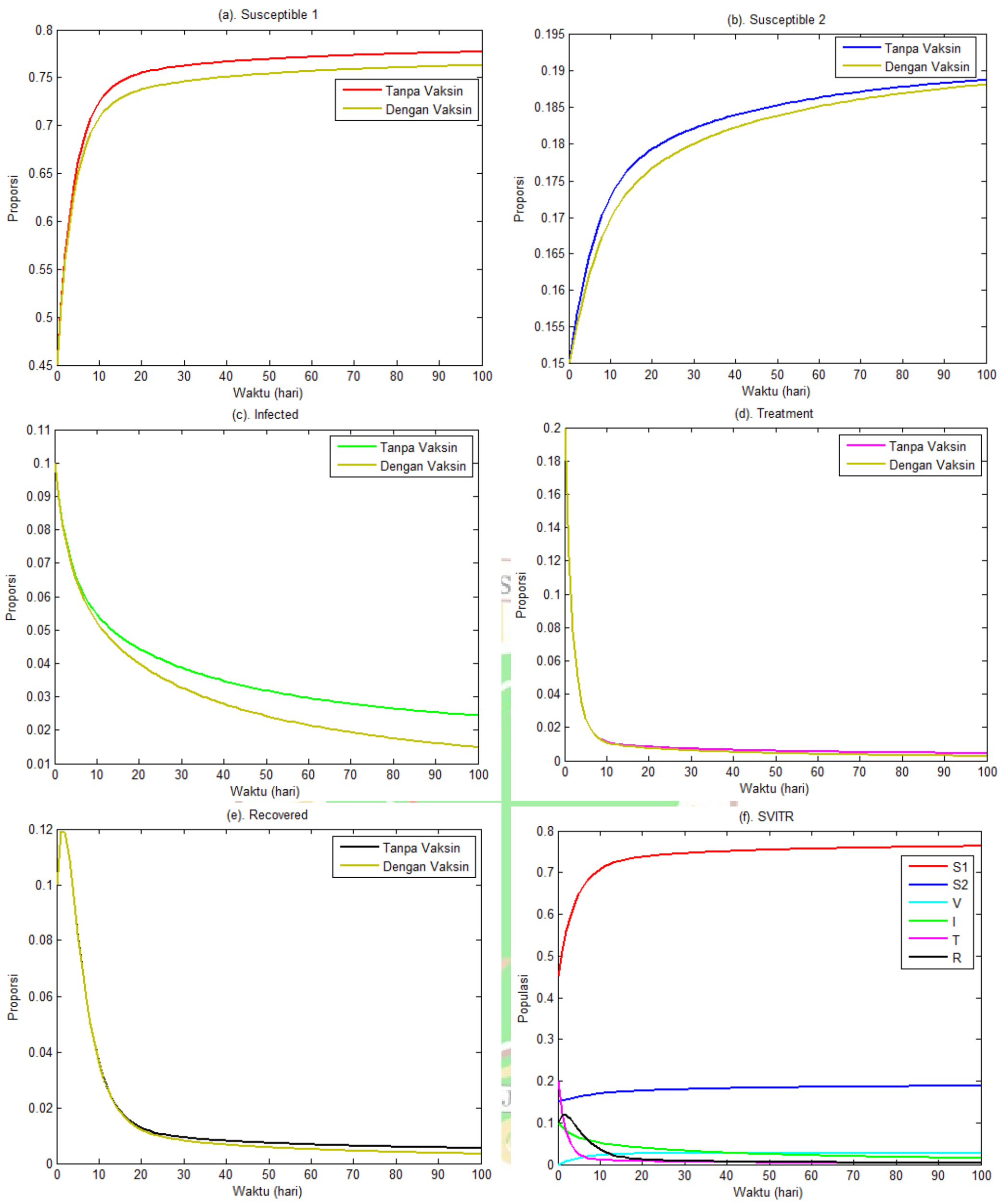
Dari (3.2.22), diperoleh $A = 0.25002, \ B = 0.25780$, dan $C = 0.25709$, sehingga dapat diperiksa bahwa (3.2.29), (3.2.31),dan (3.2.33) terpenuhi. Dapat juga diperiksa bahwa

$$\lambda_3 = -0.5354921763 \times 10^{-3}, \quad \lambda_4 = -0.2653433975,$$
$$\lambda_5 = -0.2495131401 + 0.008140659275i,$$
$$\lambda_6 = -0.2495131401 - 0.008140659275i.$$

Grafik solusi dari model (3.1.1) dengan nilai parameter dalam Tabel 3.3.1 diberikan dalam Gambar 3.3.2. Selanjutnya, Grafik solusi dari model (3.1.1) dengan nilai parameter dalam Tabel 3.3.2 diberikan dalam Gambar 3.3.3.



Gambar 3.3.2: (a). Grafik Subpopulasi *Susceptible 1*, (b). Grafik Subpopulasi *Susceptible 2*, (c). Grafik Subpopulasi *Infected*, (d). Grafik Subpopulasi *Treatment*, (e). Grafik Subpopulasi *Recovered*, dan (f). Grafik Populasi $SVITR$ untuk Titik Tetap bebas penyakit



Gambar 3.3.3: (a). Grafik Subpopulasi *Susceptible 1*, (b). Grafik Subpopulasi *Susceptible 2*, (c). Grafik Subpopulasi *Infected*, (d). Grafik Subpopulasi *Treatment*, (e). Grafik Subpopulasi *Recovered*, dan (f). Grafik Populasi $SVITR$ untuk Titik Tetap Endemik

Berdasarkan simulasi numerik diberikan grafik solusi model (3.1.1) dalam rentang waktu 100 hari pertama sejak pemberian vaksin. Pada Gambar 3.3.2 (a) dapat diamati bahwa subpopulasi *Susceptible 1* untuk titik tetap bebas penyakit setelah vaksinasi mengalami penurunan jumlah individu, dengan selisih titik tetap sebesar 0.02179, dan Gambar 3.3.2 (b) menunjukkan bahwa subpopulasi *Susceptible 1* untuk titik tetap bebas penyakit setelah diberi vaksin mengalami penurunan jumlah individu, dengan selisih titik tetap sebesar 0.00469. Gambar 3.3.2 (c), (d), dan (e) masing-masing adalah grafik solusi untuk subpopulasi *Infected*, subpopulasi *Treatment*, dan subpopulasi *Recovered* untuk titik tetap bebas penyakit dengan perubahan penurunan jumlah individu yang sangat sedikit. Hal ini dikarenakan tidak ada lagi penularan COVID-19, sehingga dengan berlalunya waktu jumlah individu dari subpopulasi *Infected*, subpopulasi *Treatment*, dan subpopulasi *Recovered* tersebut akan habis. (iii) Selanjutnya, dari Gambar 3.3.3 (a) dapat diamati bahwa subpopulasi *Susceptible 1* untuk titik tetap endemik sesudah vaksinasi mengalami penurunan jumlah individu dengan selisih titik tetap sebesar 0.00735. Gambar 3.3.2 (b) menunjukkan penurunan jumlah individu dari subpopulasi *Susceptible 2* setelah vaksinasi, dengan selisih titik tetap sebesar 0.00273. Gambar 3.3.3 (c) menunjukkan penurunan jumlah individu dari subpopulasi terinfeksi setelah vaksinasi, dengan selisih titik tetap endemik sebesar 0.16934. Gambar 3.3.3 (d) adalah grafik solusi subpopulasi *Treatment*, dapat dilihat bahwa jumlah individu yang menjalani pengobatan juga berkurang setelah adanya vaksinasi, dengan selisih titik tetap endemiknya sebesar 0.1005. Gambar 3.3.3 (e) menunjukkan perubahan jumlah individu dari subpopulasi *Recovered*, setelah adanya vaksinasi pada awalnya mengalami kenaikan kemudian turun menuju titik tetap, dengan selisih titik tetap endemik sebesar 0.1206.

Untuk melihat pengaruh vaksinasi terhadap subpopulasi *Susceptible*, subpopulasi *Infected*, subpopulasi *Treatment*, dan subpopulasi *Recovered*, berikut diberikan grafik solusi dengan nilai-nilai parameter dalam Tabel 3.3.3.

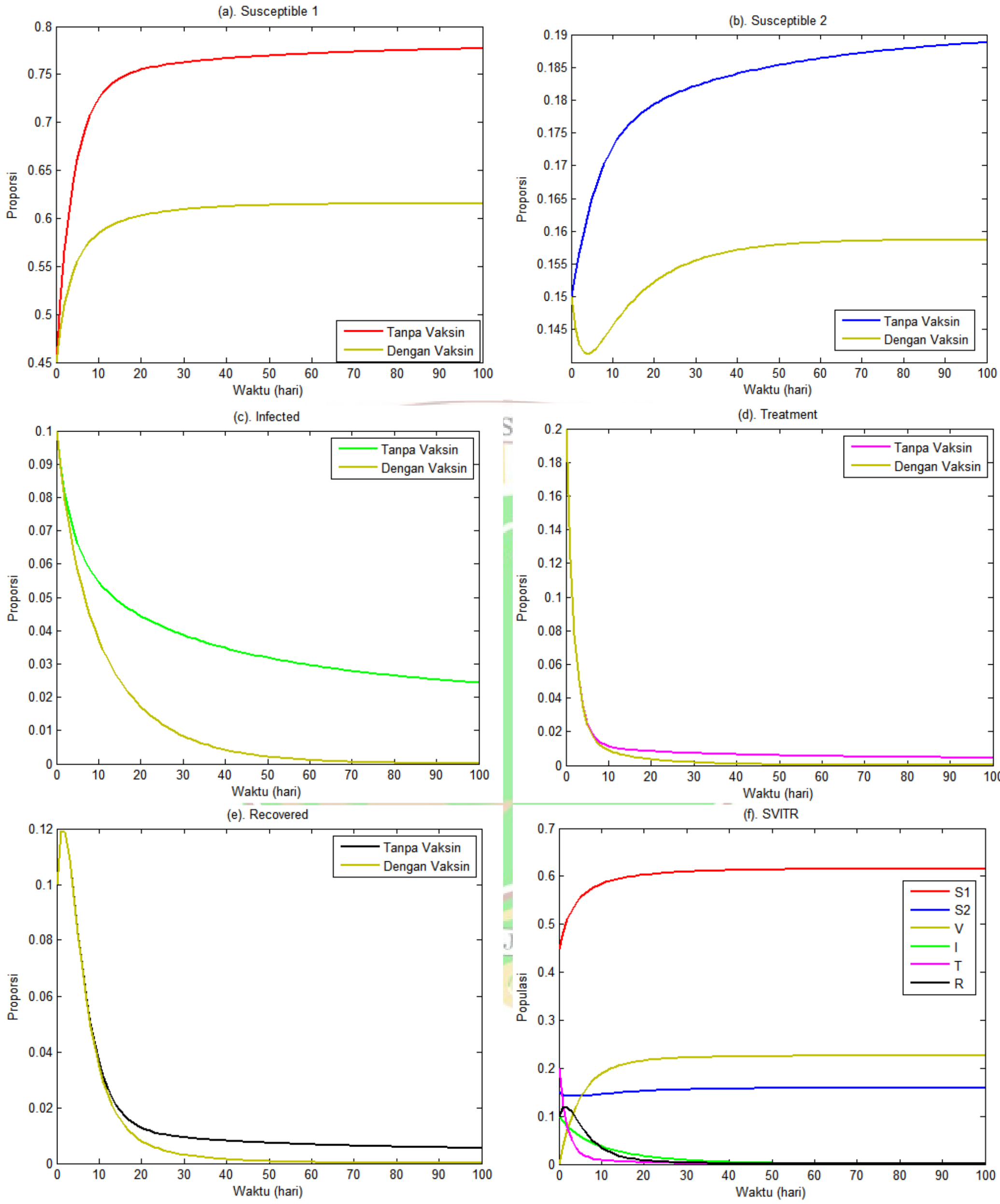
Tabel 3.3.3: Nilai-nilai Parameter Titik Tetap Endemik

No	**Parameter**	**Nilai**	**Sumber**	**No**	**Parameter**	**Nilai**	**Sumber**
1	Λ_1	0.2	[14]	6	μ	0.1	[16]
2	Λ_2	0.05	[14]	7	ρ	0.3	[16]
3	β_1	0.3	[14]	8	σ_1	0.075	Asumsi
4	β_2	0.6	[14]	9	σ_2	0.065	Asumsi
5	α	0.25	[16]	10	γ	0.02	Asumsi

Berdasarkan (3.2.11) dan (3.2.13) diperoleh titik tetap endemik adalah $C^* = (S_1^*,\ S_2^*,\ V^*,\ I^*,\ T^*,\ R^*)$, dengan

$$
\begin{aligned}
S_1^* &= 0.615384615384615, \quad S_2^* = 0.158730158730159, \\
V^* &= 0.225885225885226, \quad I^* = 1.797165303748037 \times 10^{-30}, \\
T^* &= 3.710305983790376 \times 10^{-31}, \quad R^* = 6.037232981571493 \times 10^{-31}.
\end{aligned}
$$

Dari Gambar 3.3.2, Gambar 3.3.3, dan Gambar 3.3.4 dapat dilihat bahwa adanya pengaruh pemberian vaksinasi terhadap masing-masing subpopulasi *Susceptible*, subpopulasi *Infected*, subpopulasi *Treatment*, dan subpopulasi *Recovered*.



Gambar 3.3.4: (a). Grafik Subpopulasi *Susceptible 1*, (b). Grafik Subpopulasi *Susceptible 2*, (c). Grafik Subpopulasi *Infected*, (d). Grafik Subpopulasi *Treatment*, (e). Grafik Subpopulasi *Recovered*, dan (f). Grafik Populasi $SVITR$ untuk Titik Tetap bebas penyakit

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada penelitian ini, dapat diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Dalam model $SITR$ pada penyebaran COVID-19 dengan vaksinasi terdapat dua titik tetap , yaitu titik tetap bebas penyakit

$$C^0 = \left(\frac{\Lambda_1}{(\alpha + \sigma_1)}, \frac{\Lambda_2}{(\alpha + \sigma_2)}, \frac{\sigma_1 \Lambda_1 (\alpha + \sigma_2) + \sigma_2 \Lambda_2 (\alpha + \sigma_1)}{\alpha (\alpha + \sigma_1)(\alpha + \sigma_2)}, \ 0, \ 0, \ 0 \right),$$

dan titik tetap endemik $C^* = ({S_1}^*, \ {S_2}^*, \ V^*, \ I^*, \ T^*, \ R^*)$, dengan

$$\begin{aligned}
{S_1}^* &= \frac{\Lambda_1}{\beta_1 I^* + (\alpha + \sigma_1)}, \\
{S_2}^* &= \frac{\Lambda_2}{\beta_2 I^* + (\alpha + \sigma_2)}, \\
V^* &= \frac{\sigma_1 {S_1}^* + \sigma_2 {S_2}^*}{\gamma I^* + \alpha}, \\
I^* &= \frac{(\alpha\beta_1 + \gamma\sigma_1){S_1}^* + (\alpha\beta_2 + \gamma\sigma_2){S_2}^* - (\alpha + \mu)\alpha}{[(\alpha + \mu) - (\beta_1 {S_1}^* + \beta_2 {S_2}^*)]\gamma}, \\
T^* &= \frac{\mu I^*}{(\rho + \alpha)}, \\
R^* &= \frac{\rho T^*}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Titik tetap bebas penyakit stabil asimtotik jika

$$\frac{(\alpha\beta_1 + \gamma\sigma_1)\Lambda_1(\alpha + \sigma_2) + (\alpha\beta_2 + \gamma\sigma_2)\Lambda_2(\alpha + \sigma_1)}{\alpha(\mu + \alpha)(\alpha + \sigma_1)(\alpha + \sigma_2)} < 1,$$

sedangkan titik tetap endemik stabil asimtotik jika (i). $A + B + C > 0$.

(ii). $$\frac{\left[(A^2(B+C) + B^2(A+C) + C^2(A+B) + 2ABC) + B\beta_1^2 I^* S_1^* + C{\beta_2}^2 I^* S_2^*\right]}{\left[\gamma I^*(A\gamma V^* + \sigma_1\beta_1 S_1^* + \sigma_2\beta_2 S_2^*)\right]} > 1.$$

(iii). $$\frac{(ABC^2 + BCZ_2 + CX + C^2Z_1)X + (AB^2C + BCZ_1 + B^2Z_2 + BY)Y}{(AB^2C^2 + (2BC + C^2)X + (2BC + B^2)Y + B^2CZ_1 + BC^2Z_2 + BC(B+C)Z_3)Z_3} +$$
$$\frac{(B+C)XY + BC(B+C)Z_3^2}{(AB^2C^2 + (2BC + C^2)X + (2BC + B^2)Y + B^2CZ_1 + BC^2Z_2 + BC(B+C)Z_3)Z_3} > 1.$$

2. Simulasi numerik memperlihatkan bahwa adanya pengaruh pemberian vaksin pada subpopulasi *Susceptible*, subpopulasi *Infected*, subpopulasi *Treatment*, dan subpopulasi *Recovered*. Dengan kata lain, vaksin dapat mengendalikan penyebaran COVID-19.

4.2 Saran

Adapun saran yang dari penulis untuk penelitian berikutnya adalah penelitian ini dapat diterapkan untuk jenis penyakit menular lainya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H., dan C, Rorres. 2014. *Elementary Linier Algebra.* Wiley: Canada.

[2] Beaglehole, R., R. Bonita. 1993. *Basic Epidemiology 2nd edition.* World Health Organization: Cina.

[3] Brauer, F., Pauline, V. D. D., and Jianhong, W. 2008. *Mathematical Epidemology.* Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg.

[4] Diagne, M. L., H. Rwezaura, S. Y. Tchoumi, dan J. M. Tchuenche. 2021. A Mathematical Model of COVID-19 with Vaccination and Treatment. *Hindawi Computational and Mathematical Methods in Medicine.* **Vol. 2021**: 1 – 16.

[5] Din, Rahim ud dan Ebrahem A. Algehyne. 2021. On Mathematical analysis of COVID-19 by using SIR model with convex incidence rate. *Elsevier B.V.* **23**: 1–6.

[6] Fisher, S. 1990. *Complex Variables: Second Edition.* Dover Publications Inc.: New York.

[7] Iskandar H, dkk. 2021. *Pengendalian COVID-19 dengan 3M, 3T, Vaksinasi, Disiplin, Kompak, dan Konsisten Buku 2.* Kementerian Kesehatan RI: Jakarta Selatan.

[8] Lynch, Stephen. 2007. *Dynamical System With Applications Using Mathematica*. Birkhauser: Boston.

[9] Mathews. J.H, dan Fink. K. D. 2004. *Numerical Methods Using MATLAB Fourth Edition*. Pearson Prentice Hall: Upper Saddle River, New Jersey.

[10] Mitra, A. 2020. Covid-19 in India and Sir Model. *J. Mech. Contin. Math. Sci.* **15**: 1 – 8.

[11] Mohsen, ahmed. A., Hassan F. AL-Husseiny, Xueyong Zhou, Khalid Hattaf. 2020. Global stability of COVID-19 model involving the quarantine strategy and media coverage effects. *AIMS Public Health.* **7**: 587-605.

[12] N. Chitnis, J. M. Hyman, and J. M. Cushing. 2008. Determining Important Parameters in the Spread of Malaria Through the Sensitivity Analysis of a Mathematical Model. *Bulletin of Mathematical Biology.* **70**: 12721296.

[13] Perko, Lawrence. 2001. *Differential Equations andDynamical Systems.* Springer-verlag: New York, Berlin Heidelberg.

[14] Rafiq, M., Javaid, A., M. B. Riaz, Jan, A,. 2022. Numerical Analysis of a Bi-modal COVID-19 SITR Model. *Alexandria Engineering Joournal.* **61**: 227 – 235.

[15] Resmawan, Lailany, Y., Revandi, S.P, Hasan S.P, and Agusyarif, R.N. 2022. Analisis Dinamik Model Penyebaran COVID-19 dengan Vaksinasi. *Jambura Journal of Biomathematics.* **3**: 29 – 38.

[16] Sanchez, Y. G., Z. Sabir, J. L. G. Guirao. 2020. Design of A Nonlinear $SITR$ Fractal Model Based On The Dynamics of A novel Coronavirus (COVID-19). *World Scientific*. **28**: 1 – 6.

[17] Sugihantonni. A., dkk. 2021. *Pedoman Pencegahan dan Pengendalian Coronavirus Disease (COVID-19)*. Edisi Ke-5. Kementerian Kesehatan RI : Jakarta Selatan.

LAMPIRAN

Penentuan Titik Tetap Model $SITR$

Berdasarkan subbab 2.2, titik tetap diperoleh dengan membuat $\dot{S}_1 = \dot{S}_2 = \dot{I} = \dot{T} = \dot{R} = 0$

(a) Titik Tetap Bebas Penyakit

Titik tetap bebas penyakit adalah suatu keadaan tidak terjadi penyebaran COVID-19 dalam suatu populasi atau populasi tersebut bebas penyakit, yaitu $I = 0$. Jika $I = 0$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda_1 - \beta_1 I S_1 - \alpha S_1 &= 0 \\ {S_1}^0 &= \frac{\Lambda_1}{\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda_2 - \beta_2 I S_2 - \alpha S_2 &= 0, \\ {S_2}^0 &= \frac{\Lambda_2}{\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{T} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu I - (\alpha + \rho) T &= 0, \\ T^0 &= \frac{\mu(0)}{(\rho + \alpha)} \Rightarrow T^0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{R} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho T - \alpha R &= 0 \\ R^0 &= \frac{\rho(0)}{\alpha} = 0. \end{aligned}$$

Jadi diperoleh titik tetap bebas penyakit $C^0 = \left(\frac{\Lambda_1}{\alpha}, \quad \frac{\Lambda_2}{\alpha}, \quad 0, \quad 0, \quad 0 \right)$

(b) Titik Tetap Endemik

Titik tetap endemik adalah suatu keadaan dimana terjadi infeksi penyakit di dalam suatu populasi sehingga diasumsikan $I > 0$. Jika $I > 0$, diperoleh

$$\dot{S}_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda_1 - \beta_1 I S_1 - \alpha S_1 = 0$$
$$S_1{}^* = \frac{\Lambda_1}{\beta_1 I^* + \alpha},$$

$$\dot{S}_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda_2 - \beta_2 I S_2 - \alpha S_2 = 0,$$
$$S_2{}^* = \frac{\Lambda_2}{\beta_2 I^* + \alpha},$$

$$\dot{T} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu I - (\alpha + \rho) T = 0,$$
$$T^* = \frac{\mu I^*}{(\rho + \alpha)},$$

$$\dot{R} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho T - \alpha R = 0$$
$$R^* = \frac{\rho T^*}{\alpha}.$$

Maka dari persamaan

$$\dot{I} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\beta_1 S_1 + \beta_2 S_2) I - (\alpha + \mu) I = 0,$$

menjadi

$$((\beta_1 S_1 + \beta_2 S_2) - (\alpha + \mu)) I = 0,$$
$$(\beta_1 S_1 + \beta_2 S_2) - (\alpha + \mu) = 0,$$
$$\beta_1 \left(\frac{\Lambda_1}{\beta_1 I^* + \alpha} \right) + \beta_2 \left(\frac{\Lambda_2}{\beta_2 I^* + \alpha} \right) - (\alpha + \mu) = 0,$$
$$\left(\frac{\beta_1 \Lambda_1}{\beta_1 I^* + \alpha} \right) + \left(\frac{\beta_2 \Lambda_2}{\beta_2 I^* + \alpha} \right) - (\alpha + \mu) = 0,$$

$$\left(\frac{(\beta_1\Lambda_1)(\beta_2 I^* + \alpha)}{(\beta_1 I^* + \alpha)(\beta_2 I^* + \alpha)}\right) + \left(\frac{(\beta_2\Lambda_2)(\beta_1 I^* + \alpha)}{(\beta_1 I^* + \alpha)(\beta_2 I^* + \alpha)}\right) - \frac{(\alpha+\mu)(\beta_1 I^* + \alpha)(\beta_2 I^* + \alpha)}{(\beta_1 I^* + \alpha)(\beta_2 I^* + \alpha)} = 0,$$

$$\big((\beta_1\Lambda_1)(\beta_2 I^* + \alpha)\big) + \big((\beta_2\Lambda_2)(\beta_1 I^* + \alpha)\big) - \big((\alpha+\mu)(\beta_1 I^* + (\alpha)(\beta_2 I^* + \alpha)\big) = 0,$$

$$-(\alpha+\mu)\beta_1\beta_2 I^{*2} + [\beta_1\beta_2\Lambda_1 + \beta_1\beta_2\Lambda_2 - (\alpha+\mu)(\alpha)\beta_1 - (\alpha+\mu)(\alpha)\beta_2]I^* + [\beta_1\Lambda_1(\alpha) + \beta_2\Lambda_2(\alpha)$$

$$-(\alpha+\mu)\alpha^2] = 0,$$

$$I^{*2} - \left[\frac{\beta_1\beta_2(\Lambda_1+\Lambda_2)}{(\alpha+\mu)\beta_1\beta_2} - \frac{(\alpha+\mu)(\alpha)\beta_1 - (\alpha+\mu)(\alpha)\beta_2}{(\alpha+\mu)\beta_1\beta_2}\right]I^* - \left[\frac{\beta_1\Lambda_1(\alpha)}{(\alpha+\mu)\beta_1\beta_2} + \frac{\beta_2\Lambda_2(\alpha)}{(\alpha+\mu)\beta_1\beta_2}\right.$$

$$\left.-\frac{(\alpha+\mu)(\alpha^2)}{(\alpha+\mu)\beta_1\beta_2}\right] = 0,$$

$$I^{*2} - \left[\frac{(\Lambda_1+\Lambda_2)}{(\alpha+\mu)} - \frac{\alpha(\beta_1-\beta_2)}{\beta_1\beta_2}\right]I^* - \left[\frac{\alpha(\beta_1\Lambda_1 - \beta_2\Lambda_2)}{(\alpha+\mu)\beta_1\beta_2} - \frac{\alpha^2}{\beta_1\beta_2}\right] = 0,$$

dengan menggunakan rumus ABC persamaan di atas, diperoleh

$$I^* = \frac{(b-a) + \sqrt{(b-a)^2 + 4bc}}{2},$$

dengan

$$a = \left(\frac{{\beta_1}^2\Lambda_1 + {\beta_2}^2\Lambda_2}{\beta_1\beta_2(\alpha+\mu)}\right),$$

$$b = \alpha\left(\frac{\beta_1\Lambda_1 + \beta_2\Lambda_2}{\alpha(\alpha+\mu)} - 1\right),$$

$$c = \frac{\alpha}{\beta_1\beta_2}.$$

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Ratna Hayani Tsani, lahir di Sarik Alahan Tigo tanggal 20 Juni 1997 dan merupakan anak kedua dari tiga bersaudara dari pasangan ayahanda Tasril, S.Pd.I dan ibunda Nur Elina. Penulis menyelesaikan pendidikan Sekolah Dasar (SD) di SD Negeri 10 Sarik Alahan Tigo pada tahun 2010, Sekolah Menengah Pertama (SMP) di MTsN Koto Baru Solok pada tahun 2013, dan Sekolah Menengah Atas (SMA) di SMA Negeri 1 Kubung pada tahun 2016. Pada tahun yang sama, penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Andalas melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Pada tahun 2020 penulis diterima sebagai mahasiswa Program Studi S2 di Departemen Matematika dan Sains Data, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas.

Selama menjadi mahasiswa dijurusan Matematika FMIPA Unand, penulis aktif dalam organisasi HIMATIKA (Himpunan Mahasiswa Matematika) FMIPA Unand pada tahun 2016-2020 dan anggota unit kegiatan mahasiswa KCI(Kreasi Cerdas Ilmiah) FMIPA Unand. Pada tahun 2019, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) Tematik Stunting di nagari Ujung Gading, kabupaten Pasaman Barat selama 40 hari.

Puji syukur atas usaha, dorongan, dan motivasi serta izin Allah Yang Maha Kuasa, penulis dapat menyelesaikan studi di Universitas Andalas sehingga penulis dapat meraih gelar Magister Sains (M.Si) pada tanggal 19 Desember 2022.

Ratna Hayani Tsani Wisuda

ORIGINALITY REPORT

3%	3%	0%	0%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	jmua.fmipa.unand.ac.id Internet Source	3%

Exclude quotes	On	Exclude matches	< 3%
Exclude bibliography	On		