BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari sangat banyak fenomena di alam yang dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial. Pada permasalahan yang lebih realistis, solusi eksak dari berbagai persamaan diferensial seringkali sulit untuk ditentukan, sehingga pendekatan numerik menjadi suatu cara alternatif untuk digunakan. Solusi numerik dapat diperoleh dengan mengganti turunan fungsi dengan suatu hampiran berdasarkan deret Taylor [14].

Salah satu metode numerik yang paling populer digunakan dalam menghitung hampiran turunan suatu fungsi adalah metode beda hingga (*finite difference*). Pada metode ini domain suatu fungsi dipartisi atas sejumlah titik dan rumus aproksimasi untuk turunan diperoleh dari suatu ekspansi deret Taylor[10]. Berdasarkan letak lokasi titik partisi, metode beda hingga dapat dibagi menjadi tiga jenis, yaitu beda maju (*forward difference*), beda mundur (*backward difference*), dan beda pusat (*central difference*).

Pada metode beda hingga, banyaknya suku yang digunakan untuk menghampiri suatu turunan disebut orde suku pemotongan (*trancation terms*), semakin banyak suku yang digunakan maka semakin baik nilai hampirannya. Hampiran turunan dengan orde suku pemotongan ke-N dapat diperoleh dengan menyelesaikan N buah persamaan yang didapat dari N buah ekspansi deret Taylor yang masing-masing dipotong sampai $N + 1$ suku, atau dari hampiran lain berdasarkan interpolasi polinomial, operator atau diagram Lozenge [8]. Jika orde suku pemotongan tersebut diubah, maka koefisien semua suku harus dihitung kembali dengan menyelesaikan sistem persamaan baru. Akibatnya semakin tinggi orde turunan yang ingin ditentukan, maka perhitungan yang dilakukan semakin besar. Secara umum rumus beda hingga untuk turunan dengan orde ketelitian tertentu dapat dibangkitkan dengan algoritma rekursif. Salah satu algoritma rekursif tersebut telah dikembangkan oleh Fornberg [5], yang kemudian diperoleh tabel yang berisi koefisien-koefisien rumus beda maju, beda mundur, dan beda pusat untuk beberapa tingkatan turunan fungsi dengan beberapa orde ketelitian.

Dalam implementasinya, algoritma rekursif untuk menghitung hampiran turunan fungsi dengan tingkatan turunan dan orde ketelitian yang semakin tinggi membutuhkan memori komputasi yang semakin besar, karena melibatkan jumlah data (*titik-titik partisi*) yang semakin banyak. Untuk mengatasi masalah ini, diperlukan suatu rumus eksplisit untuk hampiran turunan dari suatu fungsi pada beda maju, beda mundur, dan beda pusat. Dengan bentuk eksplisit ini, hampiran turunan dengan orde ketelitian yang sangat tinggi dapat ditentukan dengan cukup mudah bahkan dengan menggunakan kalkulator sederhana, tanpa perlu menyelesaikan sistem persamaan. Hal ini tentu saja akan memberikan hasil analisis yang akurat dan efisien dari suatu sistem yang dinyatakan oleh persamaan diferensial [8]. Adapun bentuk eksplisit yang dimaksud di sini adalah suatu ekspresi matematika yang tidak melibatkan perhitungan secara rekursif.

Terkait dengan efisiensi perhitungan numerik dari turunan suatu fungsi, Khan dkk [8] telah mengembangkan bentuk eksplisit dari rumus beda hingga yang diformulasikan berdasarkan deret Taylor. Bentuk eksplisit rumus umum beda hingga untuk turunan pertama dengan orde suku pemotongan dan orde ketelitian ke-N telah dibuktikan oleh Khan dkk dengan mengambil kasus khusus pada beda maju [9]. Sementara bentuk eksplisit rumus beda hingga untuk turunan pertama dengan orde suku pemotongan ke-N pada kasus beda mundur dan beda pusat masing-masing telah dibuktikan oleh Widia [2] dan Dilla [13]. Selanjutnya Syafwan dkk [14] melanjutkan pembuktian bentuk eksplisit rumus beda hingga pada kasus beda maju untuk turunan kedua dengan orde suku pemotongan ke-N dan orde ketelitian ke-$N-1$. Adapun pengembangan serta pembuktian bentuk eksplisit rumus beda hingga pada kasus beda maju untuk turunan tingkat tinggi dengan orde ketelitian sebarang berdasarkan deret Taylor sejauh ini belum ada yang membahas.

1.2 Perumusan Masalah

Pada skripsi ini akan dibahas pengembangan dan pembuktian bentuk eksplisit rumus beda maju untuk turunan tingkat tinggi dengan orde ketelitian sebarang berdasarkan deret Taylor.

1.3 Pembatasan Masalah

Pembahasan dalam skripsi ini akan dibatasi pada kasus beda maju dari fungsi satu variabel dan kontinu.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan bentuk eksplisit rumus beda maju pada turunan tingkat tinggi dengan orde ketelitian sebarang berdasarkan deret Taylor.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan pada skripsi ini terdiri atas empat bab. Bab I memuat latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan. Konsep dan dasar-dasar teori yang berkaitan dengan permasalahan yang akan dikaji dibahas pada Bab II. Selanjutnya pada Bab III dijelaskan bentuk eksplisit rumus beda maju dengan orde turunan dan orde ketelitian sebarang. Terakhir pada Bab IV disajikan kesimpulan dan saran.