

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu persamaan diferensial parsial (PDP) nonlinier yang sering dipelajari baik dalam aspek teori maupun dalam konteks aplikasinya adalah persamaan Korteweg-de Vries (disingkat KdV). Hal ini disebabkan persamaan tersebut memodelkan banyak fenomena penting, seperti perambatan gelombang air pada lorong yang dangkal, perambatan gelombang hidromagnetik yang bebas tubrukan, perambatan gelombang ion-akustik, perambatan gelombang pada batang elastis, dan berbagai fenomena lainnya [11].

Bentuk standar dari persamaan KdV diberikan oleh

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (1.1.1)$$

Persamaan KdV (1.1.1) pertama kali diperkenalkan oleh Diederik Johannes Korteweg dan Gustav de Vries [6] pada tahun 1895, ketika mereka mempelajari perambatan gelombang air pada lorong yang dangkal. Dalam hal ini $u(x, t)$ pada persamaan (1.1.1) menyatakan ketinggian permukaan air di atas ekuilibrium pada posisi x dan waktu t .

Dalam mempelajari persamaan (1.1.1), Korteweg dan de Vries me-

ngonfirmasi eksistensi solusi gelombang soliter. Solusi gelombang soliter sendiri adalah solusi gelombang berjalan dengan profil yang asimtotik ke suatu konstanta ketika koordinat spasialnya menuju $\pm\infty$ dan merambat dengan kecepatan konstan [2].

Persamaan KdV telah diinvestigasi secara luas dan dikembangkan secara berkelanjutan dalam beberapa dekade terakhir. Beberapa pengembangan persamaan KdV telah diaplikasikan di banyak bidang, termasuk teori medan kuantum, fisika plasma, fisika zat padat (*solid state*), dan kristal takharmonik [9].

Salah satu modifikasi dari persamaan KdV yang paling sederhana adalah

$$v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0. \quad (1.1.2)$$

Persamaan (1.1.2) diperoleh dengan cara mensubstitusikan transformasi Miura [12] $u = v^2 + v_x$ ke dalam persamaan (1.1.1). Perel'man dkk [13] menggunakan persamaan (1.1.2) untuk memodelkan gelombang elektrohodinamik. Persamaan (1.1.2) dikenal dengan istilah persamaan KdV yang dimodifikasi (*modified* Korteweg-de Vries) atau disingkat dengan mKdV.

Pada tahun 1973, Hirota [3] memperkenalkan persamaan mKdV berbentuk diskrit, yang dituliskan sebagai berikut :

$$u'_n = (1 + u_n^2)(u_{n-1} - u_{n+1}), \quad (1.1.3)$$

dimana u'_n menyatakan turunan fungsi u_n terhadap waktu t , dan n menyatakan

posisi titik diskritisasi. Persamaan (1.1.3) adalah salah satu contoh persamaan beda-diferensial (PBD) nonlinier. Persamaan (1.1.3) mempunyai aplikasi yang luas dalam berbagai bidang, seperti fisika plasma, gelombang elektromagnetik di dalam ferromagnetik, dan sistem dielektrik [18].

Pada penelitian ini akan dikaji bentuk umum dari persamaan (1.1.3), yaitu

$$u'_n = (\alpha \pm u_n^2)(u_{n-1} - u_{n+1}), \quad (1.1.4)$$

dimana $\alpha > 0$. Kasus untuk $\alpha = 1$ sudah dibahas oleh Zhu dkk [18] dengan menggunakan metode Riemann-Hilbert. Sedangkan kasus tanda negatif di depan u_n^2 sudah dibahas oleh Zhang dkk [16] dengan menggunakan metode Jacobi eliptik.

Solusi gelombang soliter pada PDP atau PBD nonlinier dapat ditentukan dengan menggunakan metode tanh (tangen hiperbolik). Metode tanh pertama kali diperkenalkan oleh Malfiet [7] pada tahun 1992, dan diterapkan pada persamaan Korteweg-de Vries (KdV)-Burgers dan persamaan Fisher. Malinzi dan Quaye [8] menggunakan metode tanh untuk menentukan solusi eksak dari model-model PDP nonlinier yang sering ditemui dalam bidang fisika dan biosains, seperti model melanoma (kanker kulit), model pertumbuhan mikroba, dan model interaksi tumor dan kekebalan tubuh.

Metode tanh dianggap unggul karena perhitungannya relatif lebih sederhana dibandingkan dengan metode yang lain [7]. Asumsi yang digunakan dalam metode tanh adalah bahwa solusi gelombang soliter yang ingin dicari berbentuk polinomial dalam fungsi tanh. Alasan pemilihan fungsi tanh pada

metode ini karena turunan tanh muncul dalam bentuk tanh juga dan profilnya asimtotik ke suatu konstanta sehingga memenuhi sifat gelombang soliter.

Selama ini metode tanh banyak digunakan pada sistem kontinu (PDP nonlinier) tetapi sangat sedikit diterapkan pada sistem diskrit (PBD nonlinier). Beberapa peneliti yang pernah menggunakan metode tanh pada sistem diskrit adalah Baldwin dkk [1] yang membahas persamaan Toda diskrit dan Zhu dkk [19] yang mengkaji persamaan hybrid diskrit dan persamaan Ablowitz-Ladik diskrit.

Pada referensi [1] telah diberikan solusi eksak beberapa PBD nonlinier, namun sebagian besar tidak dilengkapi dengan uraian lengkap proses penyelesaiannya masing-masing. Salah satu PBD nonlinier yang tidak dibahas proses penyelesaiannya adalah persamaan mKdV diskrit (1.1.4) untuk kasus tanda negatif di depan u_n^2 . Pada penelitian ini akan dibahas proses penyelesaian persamaan (1.1.4) untuk kasus umum dengan menggunakan metode tanh.

1.2 Rumusan Masalah

Dalam penelitian ini akan dikaji bagaimana memperoleh solusi gelombang soliter pada persamaan mKdV diskrit (1.1.4) dengan menggunakan metode tanh.

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah menentukan solusi gelombang soliter pada persamaan mKdV diskrit (1.1.4) dengan menggunakan metode tanh.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memperkaya kajian tentang metode-metode penyelesaian persamaan beda-diferensial nonlinier dalam memperoleh solusi gelombang soliter.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan dalam tesis ini dibagi ke dalam empat bab. Pada Bab I dibahas latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan. Konsep dasar, materi penunjang, dan perkembangan penelitian terkait diberikan pada Bab II. Selanjutnya pada Bab III dibahas penentuan solusi gelombang soliter pada modifikasi persamaan Korteweg-de Vries diskrit (1.1.4) dengan menggunakan metode tanh. Hasil-hasil yang diperoleh kemudian disimpulkan pada Bab IV.